This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

FROM THE LIBRARY OF
Professor Karl Heinrich Rau
OF THE UNIVERSITY OF HEIDELBERG
PRESENTED TO THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
BY
Mr. Philo Parsons
OF DETROIT
1871

Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
631
E65

Digitized by Google

Digitized by Google

10819
Green

Die

PROBLEME

der

Geraden Linie, des Winkels

und der

Ebenen Fläche.

PARSONS LIBRARY
University of
MICHIGAN

Von

Heinrich Erb,

Grossherzoglich Badischem Finanzrath.

HEIDELBERG,

in Commission der **Joseph Engelmann**'schen Verlagsbuchhandlung.

1846.

Digitized by Google

Druck von Creuzbauer & Hasper in Carlsruhe.

Digitized by Google

Einleitung.

Eine Linie, deren Punkte alle in derselben Richtung liegen, oder welche überall dieselbe Richtung hat, pflegt *gerade* Linie genannt zu werden; was aber Richtung sey, sucht man vergeblich zu erfahren.

Indessen herrscht die Meinung, als lasse die Linie, die dem Anschauenden als Linie der überall gleichen Richtung, als gerade Linie bezeichnet wird, eine logische Erklärung nicht zu, als könne diese Linie anders nicht als durch Anschauung erkannt werden.

So sagt *Kästner*: „Die gerade Linie wird Niemand aus irgend einer Erklärung kennen lernen, und Niemand hat es auch nöthig. Aber man kann wohl etwas von ihr sagen, was die Aufmerksamkeit leitet, auf das, was sie zu einer geraden Linie macht, genauer Acht zu geben. Wenn man in A einen Punct, einen Körper, auf dessen Grösse man nicht sieht, setzet, so kann sich derselbe von seinem Ort nach unzähligen Gegenden bewegen. Sagt man, er soll nach B zu gehen, so ist die Gegend bestimmt, nach der er gehen soll, und er könnte nach eben der Gegend noch über B hinaus nach E gehen. Ginge er von A nach C, so ginge er nach der Gegend, die der ersten entgegengesetzt ist, und sein Weg AC wäre in Absicht auf AB verneinend.“

Digitized by Google

„Bei der krummen Linie aber geht der Punct, der sich von A aus bewegt, nicht gleich nach der Gegend zu, nach welcher B in Absicht auf A liegt, sondern nimmt verschiedene ganz andere Wege, deren keiner ihn nach B führen würde, wenn er auf demselben verbliebe. Also wird eine krumme Linie von einem Puncte beschrieben, der sich beständig von der Gegend, nach der er jetzo gehet, in dem nächstfolgenden Augenblicke ablenket, oder seinen Weg beständig ändert.“

„Die Geometer nehmen hiebei ferner an, dass diese Aenderung nach dem Gesetze der Stetigkeit geschehe. Der Punct hat die Richtung seines Weges von A bis B merklich verändert. Ehe diese Veränderung so gross werden konnte, als sie in B ist, mussten alle dazwischen fallende kleinere Veränderungen vorkommen. Der Punct, der eine krumme Linie beschreibt, ändert seine Wege nie plötzlich, wie in der 3. Figur aus GH in HI, aus HI in IK, sondern unmerklich, dass sich nicht angeben lässt, um wie viel er in jedem Augenblicke von dem Wege des vorigen Augenblicks abgewichen ist. So wird er in der zweiten Figur von CE nicht unmittelbar in EF gehen, sondern den Knoten EdDeE beschreiben, der ihn durch unmerkliche Aenderungen des Weges E in die Richtung bringt, aus der er sich da weiter ablenket in EF fortzugehen. Also unterscheidet sich die krumme Linie von der Zusammenfügung gerader Linien in zwei Stücken: 1) dass sich dorten kein gerader Theil bestimmen lässt, wie hier GH, HI, IK; 2) dass man dorten nicht bestimmen kann, wie weit die Richtung des beschreibenden Punctes in jedem Augenblicke, von der Richtung im nächstvorhergehenden unterschieden ist.“

„Weil alle Theile einer geraden Linie AB, BF, (1. F) nach einerlei Gegend zu liegen, so findet man in keinem Theile etwas, das nicht auch in dem Ganzen zu finden wäre, denn das Ganze streckt sich nach eben der Gegend. Nur die Grösse unterscheidet den Theil vom Ganzen, und man kann also sagen, bei der geraden Linie sey jeder Theil

Digitized by Google

dem Ganzen ähnlich. Der Freih. *v. Wolf* hat dieses für eine Erklärung der geraden Linie angegeben, und die Aehnlichkeit in eben dem Umstande gesucht, den ich angezeigt habe. Ich finde nicht, dass ihn dieses in den Stand gesetzt, von der geraden Linie etwas neueres oder gründlicheres, als man vor ihm wusste, zu sagen. Uebrigens sind solchergestalt alle geraden Linien einander ähnlich, weil jede ein Theil der grössern werden kann; und alle Theile der krummen Linie sind dem Ganzen unähnlich."

D'Alembert bemerkt unter dem Artikel Courbe in der math. Abth. der Pariser Encyclopédie méthodique folgendes:

„Courbe est, dit-on, une ligne, dont les différens points sont dans différentes directions, ou sont différemment situés les uns par rapport aux autres. C'est du moins la définition que donne Chambers après une foule d'auteurs."

„Courbe, ajoute-t-on, pris en ce sens, est opposé à ligne droite, dont les points sont tous situés de la même manière les uns par rapport aux auters."

„On trouvera peut-être chacune de ces deux définitions peu précise; et on n'aura pas tort. Cependant elles paraissent s'accorder assez avec l'idée que tout le monde a de la ligne droite et de la ligne courbe: d'ailleurs il est très-difficile de donner de ces lignes une notion qui soit plus claire à l'esprit que la notion simple, qu'excite en nous le seul mot de droit et de courbe. La définition la plus exacte qu'on puisse donner de l'une et de l'autre, est peut-être celle-ci: La ligne droite est le chemin le plus court d'un point à un autre, et la ligne courbe est une ligne menée d'un point à un autre, et qui n'est pas la plus courte. Mais la première de ces définitions renferme plutôt une propriété secondaire que l'essence de la ligne droite, et la seconde, outre qu'elle ne renferme qu'une propriété negative, convient aussi bien à un assemblage de lignes droites qui font angle, qu'à ce qu'on appelle proprement courbe, et qu'on peut regarder comme l'assemblage d'une infinité de petites lignes droites contigues entr' elles à angles infi-

Digitized by Google

nimens obtus. Peut-être ferait-on mieux de ne point définir la ligne courbe ni la ligne droite, par la difficulté et peut-être l'impossibilité de réduire ces mots à une idée plus élémentaire que celle qu'ils présentent d'eux-mêmes."

Klügel endlich verbreitet sich in seinem mathematischen Wörterbuch über diesen Gegenstand (Nr. 2—7) wie folgt:

„2. Die gerade Linie ist diejenige, welche zwischen den auf ihr befindlichen Puncten gleichförmig (auf einerlei Art) liegt. So erklärt sie Euklides, dessen Erklärung ich im Original hieher setze, weil sie nicht immer richtig übersetzt wird: *Εὐθεια γραμμη ἐστιν, ἥτις ἐξ ἰσου τοις ἐφ ἑαυτης σημειοις κειται.* Die Gleichförmigkeit der Lage der Theile ist es, was die gerade Linie von der krummen unterscheidet. In der geraden Linie haben nicht allein die an einander grenzenden, sondern auch abgesonderte Theile einerlei Lage gegen einander, wenn die Zwischenräume gleich gross genommen werden. Bei ungleichen Zwischenräumen ist die Verschiedenheit des Abstandes der Theile von einander das einzige unterscheidende in der Lage."

„3. Diese Identität in der Lage der Theile einer geraden Linie gegen einander, sowohl der benachbarten als der entfernten, ist die Ursache, warum es sich nicht zeigen lässt, wie sie gezeichnet oder construirt werden kann. Der kleinste Theil ist wie der grössere beschaffen; von keiner andern Grösse oder Lage abhängig, wie es schon bei dem Kreise der einfachsten Figur nach der geraden Linie der Fall ist. Euklides setzt es daher als Postulate an, von jedem Puncte bis nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen; desgleichen eine gerade begrenzte Linie stetig gerade fort zu verlängern. Das heisst, man muss den Begriff von einer geraden Linie zur Geometrie mitbringen. Sie ist eine ursprüngliche Vorstellung des reinen Verstandes, die nicht aus der Erfahrung geschöpft wird. Ein straff ausgespannter Faden versinnlicht nur den Begriff, aber giebt ihn uns nicht. Wir nennen einen solchen Faden gerade, weil wir an ihm die ideale Gleichförmigkeit der Lage seiner Theile sehen.

Digitized by Google

Wenn wir den abstracten Begriff von gleichförmiger Lage nicht hätten, so würden wir an einem straffen Faden oder geraden Stocke nichts als einen Faden oder Stock erblicken, wie es ohne Zweifel selbst bei dem Elephanten oder einem andern wohl unterscheidenden Thiere der Fall ist."

„4. Auf der Gleichförmigkeit der Lage in einer geraden Linie beruht es, dass zwischen zwei Puncten nur Eine gerade Linie Statt findet, oder dass sie durch zwei Puncte in ihrer ganzen unbegrenzten Ausdehnung völlig bestimmt (individualisirt) wird. Gäbe es mehrere gerade Linien zwischen zwei Puncten in derselben Ebene, so würde ihre Verschiedenheit von der Ungleichheit in der Lage der Theile entstehen; es wären keine geraden Linien."

„Eine krumme Linie hingegen kann man, ohne ihre Figur zu ändern, durch zwei gegebene Puncte derselben in unendlich viele Lagen bringen. Dabei aber ist uns die Vorstellung von einer Linie durch jene zwei Puncte gegenwärtig, welche sich nicht dreht, das ist von einer geraden, der nur auf eine einzige Art zwischen den beiden Puncten möglichen Linie."

„5. Daher kann man auch die gerade Linie für diejenige erklären, welche durch zwei Puncte in ihrer ganzen unbegrenzten Ausdehnung nur auf eine einzige Art gezogen werden kann. Zwei Puncte durch eine gerade Linie verbinden, heisst dann, diejenige Linie zwischen ihnen sich gedenken, welche nur auf eine einzige Art zwischen ihnen gedacht werden kann. Eine gegebene gerade Linie verlängern, heisst nur, ihre Begrenzung aufheben. Diese Vorstellungen scheinen die griechischen Geometer bei den Beweisen zum Grunde gelegt zu haben. Nicht aus der Erklärung der geraden Linie leitet Euklides etwas her, sondern aus dem Grundsatze, dass zwei gerade Linien keinen Raum einschliessen. Das ist aber im Grunde nichts anders als der Satz, es ist nur eine einzige gerade Linie zwischen zwei Puncten. Die Erklärung der geraden Linie steht inzwischen

Digitized by Google

nicht bloss wegen der methodischen Form da, sondern sie dient, den abstracten Begriff von der geraden Linie zu erwecken, und den Geist von den groben sinnlichen Vorstellungen abzuziehen.“

„6. Man hat es auch zum auszeichnenden Merkmal der geraden Linie gemacht, dass sie die kürzeste sey, die sich zwischen zwei gegebenen Puncten ziehen lässt. Dass sie kürzer ist als eine aus geraden Linien zusammengesetzte zwischen denselben Endpuncten, lässt sich aus Euklides I. 20 vollkommen beweisen, braucht also nicht zur Erklärung gemacht zu werden. Daraus lässt es sich auch für krumme Linien zeigen, wenn diese als Grenzen einer aus geraden Linien zusammengesetzten betrachtet werden. Allein Archimedes lässt sich hierauf nicht ein. In der Vorrede zu den Büchern über Kugel und Cylinder sagt er: Ich nehme an (*λαμβανω δε*), dass unter den Linien, die durch dieselben Puncte begrenzt werden, die gerade die kürzeste ist; dass die übrigen, so fern sie in einer und derselben Ebene liegen, ungleich sind; ferner, dass von Linien, die nach derselben Seite hin hohl sind, diejenige, welche von der andern und der geraden durch die gemeinschaftlichen Endpuncte eingeschlossen wird, die kleinere ist.“

„7. Proklus in seinem Commentar über das erste Buch des Euklides sagt, es werde durch dessen Erklärung angezeigt, dass die gerade Linie allein es sey, welche dem Abstande zwischen zwei Puncten auf derselben gleich ist. Allein dieses ist in der That eines durch das andere wechselseitig erklären. Er führt noch verschiedene Erklärungen der geraden Linie an, als dass sie nicht eine solche sey, die zum Theil in einer Ebene, zum Theil ausser derselben liege; dass alle ihre Theile auf einerlei Art mit einander zusammen treffen (*similiter congruunt,* in der lateinischen Uebersetzung); dass sie durch ihre Endpuncte ganz bestimmt wird; dass sie ihre Lage nicht ändert, wenn ihre Endpuncte unverrückt bleiben; dass sie mit einer ihr gleichartigen Linie *(quæ specie similis est)* keinen Raum einschliesst. Alles

Digitized by Google

dieses, fügt er hinzu, drückt Eigenschaften der geraden Linie aus, welche darauf beruhen, dass sie einfach ist, und den kürzesten Weg von einem Endpuncte zum andern ausmacht. Platon's Erklärung der geraden Linie, dass sie diejenige sey, in welcher die mittlern Puncte die äussern beschatten, scheint dem Proklus zu behagen, weil sie ein Bild abgebe, wie in der wirklichen Welt die Wirkungen von den ersten Ursachen durch die Mittelursachen abhangen. Als ein neuplatonischer Philosoph macht er die gerade Linie zum Symbol der unveränderlichen, unbefleckten, unaufhörlichen, allmächtigen, in allen Dingen wirksamen Vorsicht; den Kreis zum Symbol der in sich selbst zurückgewandten Wirksamkeit, die nach einem verständigen Zwecke alles regiert. Da nun der höchste Werkmeister aller Dinge diese beiden Principien, das Gerade und das Kreisförmige, in sich selbst erzeugt hatte (*præposuisset*), so brachte er zwei Einheiten aus sich hervor, in welchen die eine kreisförmig wirkt, und den Grund der verständigen Wesen enthält; die andere geradlinicht wirkend die sinnlichen Dinge entstehen lässt. Da aber die Seele (die Weltseele) ein Mittelding zwischen verständigen Wesen und sinnlichen Dingen ist, so sey diese, sofern sie mit einer verständigen Natur in Verbindung steht, kreisförmig wirksam; sofern sie das Sinnliche regiert, sorge sie für dessen Wohlseyn geradlinicht. Ich würde diese Spielerei nicht angeführt haben, wenn sie nicht in Absicht unserer neuesten, auf ähnliche Art spielenden Philosophie, eine Bestätigung der Bemerkung giebt, dass nicht leicht von einem neuen Philosophen etwas wunderliches hervorgebracht werden könne, welches nicht schon ein älterer gesagt hätte. Auch sieht man, wie sehr die Mathematik zu Proklus Zeit gesunken war, dass sie sich zu solchen Albernheiten hergeben musste."

Legendre und *Lacroix* erklären die gerade Linie als den kürzesten Weg von einem Punct zum andern; Lacroix mit dem Beisatz, wie es einleuchte, dass zwischen zwei Puncten nur eine einzige gerade Linie möglich sey.

Digitized by Google

Es giebt indessen eine Menge gleich einleuchtender oder anschaulicher Sätze der Elementargeometrie, deren Beweis für nöthig erachtet wird.

Wo aber, fragt man, ist ein Merkmal des Längenminimums herzunehmen? ist dieses ohne Anschauung der geraden Linie zwischen zwei Puncten verständlich?

Jede Eigenschaft, jedes Merkmal, welches einer Linie oder Fläche ausschlieslich zukommt, dieselbe also characterisirt, lässt sich bekanntlich zur Erklärung derselben benützen, gleichviel ob ein solches Merkmal schon mit seiner Erzählung ein Bild des zu erklärenden erweckt oder nicht; ein Umstand der schon um deswillen ganz gleichgültig erscheint, weil die zahllose Menge von Curven und Flächen mit Ausnahme einiger wenigen — und unter diesen zudem der geraden Linie und ebenen Fläche, — Eigenschaften, an deren einfache Erzählung sich unmittelbar Vorstellungen knüpfen, nicht besitzt.

Ein *ausschliesliches* Merkmal aber der kleinsten Linienausdehnung ist, wie sich beweisen lässt, folgende überall nur *grundsätzlich* angenommene Eigenschaft der dem Anschauenden als gerade Linie bezeichneten Linie, — die Eigenschaft nemlich, dass rücksichtlich jeder Ternion von Puncten dieser Linie des mittlern Punctes Abstandssumme, und eines jeden äussern Punctes Abstandsunterschied von den beiden andern Puncten dem Abstand der letztern gleich kommt.

Die Ellipse wird in der Regel ohne *Einschränkung* definirt als (ebene) Linie, deren jedes Punctes Abstandssumme, die Hyperbel als (ebene) Linie, deren jedes Punctes Abstandsunterschied von zwei gegebenen Puncten, den sogenannten Brennpuncten, eine constante Grösse ist.

Man bezeichnet den Kreis als Varietät der Ellipse, in so ferne die Abstandssumme jedes Punctes der Peripherie von den mit dem Centrum zusammenfallenden Brennpuncten constant, nemlich dem Durchmesser gleich ist. Mit gleichem Rechte könnte man auch der geraden Linie jedes begrenzte

Digitized by Google

Stück als Varietät der Ellipse, und die über die Grenzpuncte gehenden unbegrenzten Verlängerungen der geraden als Varietät der Hyperbel bezeichnen, deren Brennpuncte in beiden mit den Scheiteln, jenen Grenzpuncten, zusammenfallen. Noch mehr; man könnte jedes begrenzte Stück gerader Linie als Varietät des elliptischen, und seine Verlängerungen als Varietät des hyperbolischen Conoids betrachten.

Zum Wesen der Ellipse und des el. Conoids gehört indessen, dass jene constante Grösse oder jener constante Abstand *grösser*; zum Wesen der Hyperbel und des hyperbolischen Conoids, dass jene constante Grösse *kleiner* als der Abstand der Brennpuncte; zum Wesen des Längenminimums oder der geraden Linie endlich, dass jene constante weder grösser noch kleiner als der Abstand der Brennpuncte, sondern diesem gleich kommt.

Mit Rücksicht hierauf bilden die geraden Linien eine eigene Klasse von Linien, die mit der Klasse der Ellipsen und Hyperbeln zwar eine analoge Eigenschaft darbieten, gleichwohl aber wesentlich von ihnen verschieden sind. Man kann daher die genannten Linien definiren wie folgt:

die *Ellipse* als ebene Linie, deren jedes Punctes Abstandssumme von zwei gegebenen Puncten constant und grösser als der Abstand der letzteren;

die *Hyperbel* als ebene Linie, deren jedes Punctes Abstandsunterschied von zwei gegebenen Puncten *constant* und kleiner als der Abstand der letztern;

die *gerade Linie* als Linie, deren jedes Punctes *entweder* Abstandsumme *oder* Abstandsunterschied von zwei gegebenen Puncten *constant* und *gleich* dem Abstand der letztern.

Allein ein anderes gleich nahe liegendes Merkmal der dem Anschauenden als gerade Linie bezeichneten Linie ergiebt sich beim ersten Blick. Denn wer sieht nicht, wenn ein Senkel auf eine Ebene errichtet, und aus dem Fusspunct in der Ebene ein Kreis gezogen wird, dass jeder Punct des

Digitized by Google

Senkels von einem unter drei Puncten dieses Kreises so weit absteht, wie von jedem der beiden andern?

Welche dieser beiden Eigenschaften man aber als Erklärung der geraden Linie annehmen mag, so ist keine derselben eine *unmittelbare* Folge der andern, und die nächste Aufgabe muss es seyn, sowohl ihren Zusammenhang als auch das Vorhandenseyn anderer von der geraden Linie nur grundsätzlich angenommener Eigenschaften logisch nachzuweisen.

Während nun bei der Ellipse und Hyperbel bereits erwiesene geometrische Sätze zu Gebote standen, deren schickliche Verbindung zur Entdeckung neuer Eigenschaften dieser Curven führte, fand man sich bei der ganz analogen geraden Linie von allen zu diesem Ziele bringenden Mitteln entblösst, da die herrschende Ansicht, als sey alles Krumme aus geraden und ebenen*) Elementen gebildet, als könne das sinnlich einfachere aus dem sinnlich minder einfachen seine Herleitung nicht erhalten, selbst schon dem *Versuche*, die Kugel als Mittel zur Analyse der geraden Linie zu gebrauchen, im Wege stehen musste.

Eine Fläche, durch deren jede zwei Puncte sich gerade Linien ziehen lassen, wird *Ebene* genannt. Auch von ihr lässt sich eine von der geraden Linie unabhängige Erklärung geben; ein augenscheinliches Merkmal der dem Anschauenden als Ebene bezeichneten Fläche ist es nemlich, dass jeder Punct der Ebene von einem unter zwei gegebenen Puncten so weit entfernt ist, wie vom andern, wenn das Punctenpaar einem Senkel auf der Ebene angehört und in gleichem Abstand vom Fusspunct zu beiden Seiten der Ebene liegt.

Hier entsteht aber die Frage: lassen sich durch jede zwei Puncte einer solchen Fläche gerade Linien ziehen, deren sämmtliche Puncte in die Fläche fallen, und sind überhaupt solche Flächen möglich?

Das elfte Euklidische Axiom stellt für *ganz besondere* Fälle die Behauptung auf, dass ein paar unbegrenzte gerade

*) Das Element windschiefer Flächen ist erweislich *krumm*, auch wenn man dem Element gar keine Ausdehnung zuschreibt.

Digitized by Google

Linien sich schneiden. Die Annahme der Ebene ist gleichfalls nur auf Augenschein beruhende *Behauptung* des Durchschnitts unbegrenzter Geraden in unzählig vielen andern Fällen.

Das Bestreben so vieler Mathematiker, jenem Axiom seine logische Begründung zu verschaffen, giebt Zeugniss von der Wichtigkeit dieses Problems. Weit wichtiger noch ist die Beweisführung von der Existenz der Ebene, indem diese Fläche fast allen Constructionen der Elementargeometrie, darunter vielen vom Parallelproblem ganz unabhängigen, zur Grundlage dient.

Denkt man sich nemlich (Fig. 2) im Raume irgend drei Puncte *a, b* u. *c*, deren keiner mit den beiden andern in derselben geraden Linie liegt, so sind die geraden *ab*, *ac* und *bc* durch dieselben bestimmt. Verbindet man den Punct *c* mit einem Punct *g* der *ab* durch eine gerade *cg*, so ist auch diese; — und zieht man zwischen einem Punct *h* der *ac* und einem Punct *l* der *bc* eine gerade *hl*, so ist endlich auch diese *bestimmt*, so wie auch ob *hl* die *cg* schneiden oder ober- oder unterhalb derselben vorbeiziehen werde. Einzig und allein der Augenschein zeigt diesen Durchschnitt, der Augenschein, der auch das Euklidische Axiom nur lehrt.

Beweis also fordert der augenscheinliche Durchschnitt der genannten Geraden nicht minder als das Euklidische Axiom. Beweisführung ist daher auch für die Existenz der Ebene erforderlich und mittelst der *Kugel* möglich.

Winkel, so lautet gewöhnlich seine Definition, ist die Neigung zweier in einem Punct sich vereinigenden geraden Linien; der Winkel wird dabei als Grösse eigener Art betrachtet, der wie andere Grössen einer Mehrung und Minderung fähig ist und den gewöhnlichen Rechnungsoperationen unterliegt.

Grundsätzlich nur und weil es der Augenschein zeigt, wird angenommen, dass die durch den Scheitel des Winkels gelegte, in seiner Ebene befindliche Gerade mit beiden

Digitized by Google

Schenkeln zwei andere Winkel bildet, deren *Summe* — im Falle die Gerade zwischen den Schenkeln hindurch geht, und deren Unterschied — im Falle sie nicht zwischen den Schenkeln hindurch zieht, dem gegebenen Winkel gleich kommt; Sätze, die logischer Begründung bedürfen und fähig sind.

Mit dem geradlinigen Winkel im Zusammenhang steht das Wesen der Linienkrümmung und Berührung, daher auch dieser Gegenstand abgehandelt wurde.

Endlich findet sich hier ein neuer Versuch zur Lösung des so vielseitig betrachteten vierten und letzten Hauptproblems der Elementargeometrie, des elften Euklidischen Axioms.

Schliesslich ist zu erwähnen, dass bei den nachstehenden Untersuchungen, zu denen augenscheinliche Beziehungen zwischen Kugel, gerader Linie und Ebene den ersten Grund gelegt haben, mitunter Winken gefolgt ist, die in einer im Jahr 1821 unter dem Titel „Zur Mathematik und Logik. Vorspiele zu ihrer Erweiterung und Begründung“ erschienenen Schrift*) von *Karl Augustus Erb* enthalten sind; eine Schrift, worin die Brauchbarkeit der gangbaren Definitionen der ebenen Fläche und der geraden Linie bestritten, das modische Verweisen auf die unmittelbare Anschauung derselben als ungültige Maxime verworfen, dagegen Zahllosigkeit der auf Grössebegriff stützbaren Bestimmungen der ebenen Fläche und der geraden Linie behauptet wird.

*) Heidelberg, bei Oswald.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Entwicklung des Kreises, der geraden Linie und der ebenen Fläche aus der Kugel, und allgemeine Betrachtungen über Winkel und Krümmung der Linien.

---

§. 1.

1. Punct ist, was keine Ausdehnung hat.

2. Des Räumlichen oder Ausgedehnten giebt es drei von einander wesentlich verschiedene Gattungen.

3. Die Ausdehnung der Materie oder des physischen Körpers heisst körperlicher Raum oder mathematischer Körper.

4. Die Grenze eines körperlichen Raumtheils besitzt Ausdehnung und heisst Fläche.

5. Die Grenze eines Flächenstücks besitzt Ausdehnung und heisst Linie.

6. Die Grenze endlich eines Linienstücks besitzt keine Ausdehnung mehr und besteht in zwei Puncten.

7. Das Räumliche, welches ein beliebiger Punct eines bewegten physischen Körpers durchläuft, ist Linie.

8. Die Grösse der Linienausdehnung heisst Länge.

9. Kein Punct liegt ausserhalb des unbegrenzten körperlichen Raums.

Digitized by Google

10. Eine charakteristische Eigenschaft des begrenzten körperlichen Raumes besteht darin, dass zwischen keinen zwei der Grenze nicht angehörigen Puncten desselben Linien beschrieben werden können, welche ihrer ganzen Ausdehnung oder Länge nach ausserhalb des Räumlichen sich befinden.

11. Eine charakteristische Eigenschaft des Flächenraums besteht darin, dass zwischen jedem Paar seiner Puncte, wie beim Körper, unzählige Linien sich beschreiben lassen, die ihrer ganzen Ausdehnung nach im Räumlichen; zugleich aber auch, wie bei der Linie, unzählige andere, die ihrer ganzen Länge nach ausserhalb desselben sich befinden.

12. Eine characteristische Eigenschaft endlich des Linienraums besteht darin, dass zwischen jeden zwei Puncten desselben nur eine einzige ihrer ganzen Ausdehnung nach in das Räumliche fallende Linie gezogen werden kann.

§. 2.

Zwischen jeden zwei Puncten lassen sich Linien von unzählig verschiedenen, jedes Maas übersteigenden, nicht aber unter jedes Maas herabsinkenden Längen denken. Vom Ort zweier Puncte hängt es ab, ob die Länge der zwischen ihnen denkbaren Linien nur bis zu einer gewissen Grenze oder unter jede Grenze und Grösse herabsinken kann, ob nemlich zwischen ihnen ein Längenminimum möglich ist oder nicht, ob die Puncte ein Linienstück von kleinst möglicher Ausdehnung begrenzen können oder nicht.

Ist zwischen zwei Puncten ein Längenminimum möglich, so besitzen dieselben Entfernung oder Abstand, sie sind discret folgende Puncte.

Jedes Linienstück kleinster Länge zwischen seinen Grenzen nennen wir ein Stück gerader Linie oder auch schlechtweg gerade Linie.

Ob zwischen zwei Puncten nur ein einziges Längenminimum, eine einzige gerade Linie möglich, bleibt vorerst dahin gestellt.

§. 3.

Die Abstände zweier Punctenpaare können einander gleich oder verschieden seyn. Als Maas des Abstandes bietet sich

Digitized by Google

zunächst die Zeit dar, welche ein Punct bedarf um bei überall gleicher Geschwindigkeit auf kürzestem Wege von einem Ort zum andern zu gelangen. Es zeigen also die Abstände zweier Punctenpaare das nemliche Verhältniss zu einander, wie jene Zeiten; diese aber sind proportionirt den durchlaufenen Längen, also den geraden Linien zwischen den gegebenen Puncten und somit sind auch die Entfernungen zweier Paare discret folgender Puncte den von ihnen begrenzten geraden Linien proportionirt.

Abstand und gerade Linie sind nicht gleichbedeutend, Abstand besteht ohne das Band der geraden Linie; Eines ist aber das Maas für das Andere, und der Kürze wegen wird oft das Eine für das Andere gesetzt werden.

Sind nun abc (Fig. 1) beliebige Puncte einer geraden Linie, so besteht nach dem Gesagten zwischen den Abständen ab, bc, ac, und den Längen der zwischen diesen Puncten gedachten geraden Linien die Proportion

Abstand $(ab : bc : ac)$ = Länge $(ab : bc : ac)$

daher auch

Abstand $(ab + bc : ac)$ = Länge $(ab + bc : ac)$

Abstand $(ac - bc : ab)$ = Länge $(ac - bc : ab)$.

Nun ist aber die Länge $(ab + bc)$ = der Länge ac und die Länge $(ac - bc)$ = der Länge ab, daher gehen die Proportionen über in folgende

Abstand $(ab + bc)$: Abstand ac = Länge ac : Länge ac.

Abstand $(ac - bc)$: Abstand ab = Länge ab : Länge ab.

Da nun die zwei letzten Glieder der Proportionen einander gleich sind, so müssen es auch die beiden ersten seyn; es ist also

Abstand ab + Abstand bc = Abstand ac und

Abstand ac — Abstand bc = Abstand ab,

und ähnlich findet man

Abstand ac — Abstand ab = Abstand bc.

Die erste sich darbietende Eigenschaft eines Längenminimums oder einer geraden Linie zwischen zwei Puncten besteht also darin, dass rücksichtlich jeder Ternion discret liegender Puncte derselben

Digitized by Google

des einen Punctes *entweder* Abstandssumme
oder Abstandsunterschied
von den beiden andern gleich ist dem Abstand der letztern.

Hieraus folgt zugleich, dass wenn ein Linienstück nur eine einzige Punctenternion enthält, deren eines Punctes *weder* Abstandssumme *noch* Abstandsunterschied von den beiden andern gleich dem Abstand der letztern, dieses Linienstück kein Längenminimum zwischen seinen Grenzen ist.

§. 4.

Die Abstandsumme eines Punctes von zwei andern kann nicht *kleiner*, sein Abstandsunterschied von denselben nicht *grösser* seyn als der Abstand der beiden andern; oder die kleinste Abstandssumme und der grösste Abstandsunterschied den ein Punct von zwei andern haben kann, ist gleich dem Abstand der letztern.

Man denke sich (Fig. 2) zwischen den Puncten a und b, b und c, a und c *gerade* Linien ab, bc, ac, so kann die Länge $(ab + bc)$ nur gleich oder grösser nicht aber kleiner seyn als die Länge ac, weil der Annahme zufolge ac ein Längenminimum ist.

Nun ist nach dem vorhergehenden Paragraphen Länge $(ba + bc : ac)$ = Abstand $(ba + bc : ac)$, und da die Länge $(ba + bc) \gtreqless$ Länge ac, so ist auch der Abstand $(ba + bc) \gtreqless$ Abstand ac oder des Punctes b Abstandssumme von a und c kann nicht kleiner seyn als der Abstand ac. Ferner kann die Länge $(bc - ba)$ nur entweder $=$ oder $<$ nicht aber grösser seyn als die Länge ac. Denn wäre die Länge $bc - ab >$ Länge ac, so wäre auch die Länge $bc >$ Länge $ac + ab$, mithin bc kein Längeminimum zwischen b und c, gegen die Voraussetzung. Da nun

Länge $(bc - ba : ac)$ = Abstand $(bc - ba : ac)$
und nach dem eben bewiesenen Länge $(bc - ba)$ nur $\lesseqgtr$ Länge ac, so ist auch Abstand $(bc - ba)$ nur entweder $=$ oder $<$ Abstand ac, oder eines Punctes Abstandsunterschied von zwei andern kann nicht grösser seyn als der Abstand der letztern.

Digitized by Google

Hiernach lässt sich obige Eigenschaft einer geraden Linie auch so ausdrücken: Einer jeden beliebigen Ternion von Puncten der geraden Linie ist des einen Punctes *entweder Abstandssumme* von den beiden andern ein Minimum *oder* sein Abstandsunterschied von denselben ein Maximum.

Aus dem Vorgetragenen folgt, dass keine zwei Puncte einer geraden Linie von einem dritten Punct derselben gleich weit entfernt sein können, wenn letzterer nicht zwischen den beiden andern liegt.

Da ferner Punctenpaare in jedem beliebigen Abstand denkbar sind, so giebt es auch gerade Linien von jede Grösse übersteigenden Längen, es ist also die gerade Linie eine unbegrenzte unendliche Linie, jedes Stück gerader Linie lässt sich beiderseits über seine Grenzen nach dem Gesetze der Längenminima ohne Ende verlängern.

§. 5.

Linienelement bedeute uns jedes Paar Orte, die ein Punct bei seiner Bewegung unmittelbar nach einander einnimmt. Zwei unmittelbar folgende Puncte einer Linie haben *keinen* Abstand, sie sind durch kein *ausgedehntes* getrennt, das Element ist *scharfes* Null, und was Abstand anbelangt, von einem einzigen Punct nicht zu unterscheiden. Denn wie klein immer der Abstand zwischen zwei Puncten angenommen werden mag, so hat er Grösse und ist daher theilbar und es musste der Punct, bevor er in den gegebenen Abstand gelangt war, jeden kleinern Abstand erreicht haben.

Aus gleichem Grunde ist auch der Unterschied einer gegebenen Grösse und der nächst grössern oder kleinern vollkommen Null, da wollte man einen Unterschied als bestehend annehmen, wie klein immer er gedacht werden mag, beliebig kleinere Unterschiede denkbar sind, und somit die mit gegebener Grösse verglichene nicht die nächst grössere oder nächst kleinere wäre.

Zwei unmittelbar auf einander folgende Puncte einer Linie, zwei Puncte nämlich, die *keinen* Abstand haben, und daher so weit es sich lediglich um Bestimmung und Messung

Digitized by Google

von Entfernungen handelt, von einem einzigen Punct nicht zu unterscheiden, als nur ein einziger Punct zu betrachten sind, heissen auch *stetig* folgende Puncte. Von jeder noch so grossen Menge stetig folgender Puncte einer Linie, hat keiner vom andern einen Abstand, sie erscheinen sämmtlich in Ansehung des Abstands als nur einziger Punct. Die Ausdehnung einer Linie besteht demnach auch nicht in einer Summe von Abständen stetig folgender Puncte.

§. 6.

Ist ein völlig begrenzter, ganz willkürlich gewählter Körper gegeben, und denkt man sich in dem eingeschlossenen Körperraum beliebig einen Punct, so hat derselbe von jedem Punct der Oberfläche einen *bestimmten* Abstand. Die Grösse der einzelnen Abstände ist bedingt durch den gewählten Punct und das Gesetz, wornach die Oberfläche erzeugt ist. Es sind nun auch solche einschliessende Flächen denkbar, worin diese Abstände sämmtlich einander gleich sind; dergleichen Flächen heissen Kugelflächen, jeder derartige Punct im Innern Centrum und jede gerade Linie aus einem Centrum nach der Oberfläche Halbmesser der Kugel.

§. 7.

Jede auf einer Kugelfläche gebildete Linie heisst kugelische Linie; es ist mithin jede Linie, deren sämmtliche Puncte von einem gegebenen Puncte gleich weit abstehen, eine kugelische Linie.

§. 8.

1. Ein gemeinschaftlicher Punct zweier auf derselben Fläche gezogener Linien heisst Durchschnittspunkt, wenn wechselsweise an diesen Punct angrenzende Theile der einen Linie in von der andern Linie gemeinschaftlich begrenzten verschiedenen Flächentheilen liegen.

2. Ein gemeinschaftlicher Punct einer Linie und Fläche heisst Durchschnittspunkt, wenn an den Punct angrenzende Theile der Linie in verschiedenen von der Fläche gemeinschaftlich begrenzten Körpertheilen liegen;

Digitized by Google

3. Eine gemeinschaftliche Linie zweier Flächen heisst Durchschnittslinie, wenn wechselsweise durch diese Linie gemeinschaftlich begrenzte Theile der einen Fläche in *verschiedenen* von der andern begrenzten Körpertheilen liegen.

§. 9.

Jeder Durchschnitt zweier Kugelflächen heisst Kreis; der Kreis ist also ein linearischer Raum, welcher die Centren zweier Kugeln zu Centren hat; zugleich ist jeder Kreis eine kugelische Linie, nicht aber umgekehrt jede kugelische Linie ein Kreis.

§. 10.

Jedes System von entfernt liegenden Punkten, jede Linie, Fläche, jeder Körper kann durch Bewegung aus einem Ort in einen andern versetzt werden, ohne dass während der Bewegung die gegenseitigen Abstände der einzelnen Punkte sich ändern müssten, da jedes System überall im unbegrenzten körperlichen Raum gedacht werden kann.

Bewegt sich eine Linie, so geschieht diess entweder mit Bewegung eines jeden Punctes derselben oder nicht.

Tritt dabei jeder Punct der bewegten Linie in den von dem unmittelbar vorhergehenden verlassenen Ort, durchläuft nemlich jeder Punct die vom unmittelbar vorhergehenden beschriebene Linie, so durchläuft die ganze Linie nur wieder Linienraum.

Bewegt sich dagegen jeder Punct der Linie in besonderer Linie, so dass keine dieser Linien mit einer andern einen Punct gemein hat, so durchläuft die Linie Flächenraum.

Hiermit ist nicht behauptet, dass alle Flächen durchlaufen werden können durch eine während der Bewegung unveränderlich bleibende Linie.

Die Grenze der so durchlaufenen Fläche wird gebildet durch die Linie in ihrem anfänglichen und endlichen Ort, sodann durch die von ihren Grenzpuncten beschriebenen Linien.

Beschreibt jeder Punct der bewegten Linie eine in sich zurückkehrende Linie, nimmt also jeder Punct und somit die

Digitized by Google

ganze Linie ihren ursprünglichen Ort wieder ein, so verschwinden jene erstgenannten Grenzen, und die erzeugte Fläche hat zur Grenze nur noch die von den Endpuncten der bewegten Linie durchlaufenen Linien. Bleiben während der Bewegung auch diese Endpuncte in Ruhe, so verschwindet alle Grenze und die so durchlaufene Fläche ist eine völlig einschliessende Fläche.

§. 11.

Unter Ort eines Punctes, der einem oder mehreren Gesetzen zugleich entsprechen soll, versteht man das Räumliche, dessen jeder Punct den gegebenen Forderungen genügt.

Besteht dieser Ort in mehreren abgesonderten Raumtheilen z. B. in zwei Linien, so kann der Punct aus einem Raumtheil in den getrennten nur dann gelangen, wenn er so lange er in keinem der getrennten Raumtheile sich befindet, mindestens eine der Forderungen, durch die sein Ort bedingt ist, unerfüllt lässt.

Jeder abgesonderte Theil eines Orts, den ein Punct ohne Aenderung der Bewegungsgesetze durchlaufen kann, nennen wir zum Unterschied vom ganzen Ort oder vom Ort schlechtweg, Ort seiner Bewegung.

In den meisten Fällen wird diese Unterscheidung entbehrlich seyn. Reducirt sich der Ort eines Puncts auf einen einzigen Punct, so ist der Punct völlig bestimmt.

§. 12.

Bleibt ein Punct bei seiner Bewegung beständig in demselben Abstand von einem oder mehreren andern festen Puncten, so heisst die Bewegung Rotation, und die festen Puncte Mittelpuncte der Rotation.

Denkt man sich ein im Raum völlig bestimmtes System von Puncten und bezieht dasselbe auf drei entweder zum System selbst gehörige oder ausserhalb demselben liegende Puncte, die wir Richtpuncte nennen, so wird im Allgemeinen jede Ortsänderung der Richtpuncte mit Unveränderlichkeit ihrer gegenseitigen Abstände auch eine Ortsänderung aller Puncte des Systems zur Folge haben, wenn die Abstands-

Digitized by Google

beziehungen des Systems und seiner Richtpuncte keine Aenderungen erleiden sollen, mag nun diese Ortsänderung hinsichtlich eines jeden der drei Richtpuncte eintreten oder nur hinsichtlich *eines* derselben mittelst Rotation um die beiden andern, in welch letzterem Falle alle Puncte des Systems, die in Folge der Bewegung des einen dieser Richtpuncte eine Ortsänderung erleiden, gleichfalls um die beiden andern Richtpuncte rotiren.

Gesetzt nun, es wäre für einen gegebenen Ort der Richtpuncte kein zweites einem vorliegenden völlig gleiches System mehr möglich, so *müsste* im Moment als der rotirende Richtpunct seinen anfänglichen Ort wieder einnimmt, ob im Rücklauf auf demselben Wege oder im Ringlauf d. h. in einer in sich zurückkehrenden Linie, auch jeder Punct des Systems seinen anfänglichen Ort wieder einnehmen.

Ist dagegen das System nicht das einzig mögliche von den ihm zukommenden Abstandsverhältnissen zu den gegebenen drei Richtpuncten und kann dasselbe ohne Aenderung des Abstandes irgend eines Punctes von irgend einem andern des Systems und der Richtpuncte für einen bestimmten Ort der letztern seinen Ort ändern, so *muss nicht* nothwendig im Moment, in welchem der rotirende Richtpunct seinen anfänglichen Ort wieder einnimmt, auch das System mit allen Puncten denselben wieder einnehmen, dagegen *kann* die Bewegung des Systems jedenfalls dergestalt bewirkt werden, dass nachdem der rotirende Richtpunct seinen anfänglichen Ort wieder erreicht, gleichviel ob im Rück- oder Ringlauf, auch jeder Punct des Systems wieder zu seinem ursprünglichen Ort zurück gelangt.

§. 13.

Jede Linie, deren ein Punct innerhalb ein anderer ausserhalb eines begrenzten Körpers liegt, durchdringt dessen Oberfläche in mindestens *einem* dem von beiden Puncten begrenzten Linientheil angehörigen Punct.

§. 14.

Jeder Punct ausserhalb der Kugel hat von einem Centrum

Digitized by Google

im Innern einen *grössern*, jeder andere Punct im Innern von demselben einen kleinern Abstand als die Puncte der Oberfläche.

Ist c (Fig. 3) ein Centrum im Innern, so ziehe man nach einem beliebigen Punct h ausserhalb der Kugel eine gerade Linie $c\,h$, alsdann wird diese die Kugelfläche zwischen c und h, und zwar nur in einem *einzigen* Puncte b durchdringen, da nach (§. 4) keine zwei Puncte der geraden von einem dritten derselben gleich weit entfernt sein können, wenn dieser letztere nicht zwischen den erstern liegt. Nun ist $b\,c + b\,h = c\,h$, also $c\,h > c\,b$, d. h. der ausserhalb liegende Punkt h hat vom Centrum einen grössern Abstand als die Puncte der Oberfläche.

Ist ferner g ein Punct im Innern und zieht man durch c und g eine gerade Linie $c\,k$, deren Endpunct k ausserhalb sich befindet, so wird, da g im Innern, die Gerade $c\,k$ die Kugel zwischen g und k in einem Punct q durchdringen, es ist daher $c\,g < c\,q$ oder es hat jeder eingeschlossene Punct von einem Centrum im Innern einen geringern Abstand als die Puncte der Oberfläche.

§. 15.

Jede durch ein Centrum im Innern der Kugel ziehende gerade Linie durchdringt dieselbe in zwei Puncten und zwar beiderseits vom Centrum in einem Punct.

Die gerade Linie ist eine unbegrenzte Linie, die in jedem Abstand von jedem ihrer Puncte beiderseits nur einen einzigen Punct hat, deshalb kann auch die durch ein Centrum im Innern der Kugel ziehende gerade Linie dieselbe zu beiden Seiten nur in einem einzigen Punct und zwar in dem dem Halbmesser entsprechenden Abstand durchdringen.

§. 16.

Die Kugel hat nur *ein* Centrum.

Gesetzt die Kugel (Fig. 3) besässe ausser dem Centrum c noch andere im Innern oder ausserhalb z. B. g und h, so schneidet jede durch c und g gehende gerade die Kugel in nur

Digitized by Google

zwei zu beiden Seiten des Centrums liegenden Puncten a und b. Nun ist $ac = cb$, daher $ac + cg > cb$ und um so mehr $ac + cg$ oder $ag > gb$, mithin ist g kein Centrum.

Liegt ferner h ausserhalb, so durchdringt jede durch c und h gehende Gerade die Kugel in zwei Puncten a und b, die beide auf der nemlichen Seite von h sich befinden. Es sind daher die Abstände ah und bh einander ungleich, also h kein Centrum.

Die Kugel hat mithin nur ein einziges in ihrem Innern liegendes Centrum.

§. 17.

Zwei Kugeln, die ein gemeinschaftliches Centrum besitzen (concentrische Kugeln), fallen gänzlich zusammen, in so ferne ihre Halbmesser einander gleich sind; im Falle der Ungleichheit aber liegt die Oberfläche der kleinern Kugel gänzlich im Innern der grössern.

Eine Folge des Satzes (§. 14).

§. 18.

Zwei Kugeln durchschneiden sich in mindestens *einem* Kreise, sobald der einer Kugel *ein* Punct innerhalb, ein anderer Punct ausserhalb der andern Kugel sich befindet.

Denn in welcher Linie auch der eine Punct auf der zugehörigen Kugelfläche zum andern sich bewegen mag, so kann er denselben nicht ohne Durchdringen der andern Kugelfläche und zwar in mindestens *einem* Puncte erreichen. Denkt man sich nun vom einen Punct zum andern stetig folgende Linien gelegt, so zerfällt die Kugelfläche in unzählige Elemente und die stetig auf einander folgenden Durchschnittspunkte bilden mindestens *eine* in sich zurückkehrende Linie, die als gemeinschaftliche Linie beider Kugeln und hier als Durchschnittslinie erscheint.

§. 19.

Der grösste Abstand zweier Puncte einer Kugelfläche ist gleich dem doppelten Abstand des Centrums von der Oberfläche.

Digitized by Google

Die Abstandssumme des Centrums von irgend zwei Puncten der Oberfläche ist gleich dem doppelten Abstand desselben von der letztern oder $= 2\,r$. Diese Abstandssumme kann aber nach §. 4 nur entweder grösser oder gleich seyn dem Abstand der gegebenen zwei Puncte. Mithin kann der Abstand keines Punctenpaars einer Kugelfläche den doppelten Halbmesser übersteigen.

§. 20.

Der Ort der gemeinschaftlichen Puncte zweier oder mehrerer Kugeln heisst Berührungsort, wenn entweder kein Theil der einen Kugel *ausserhalb* der andern, — oder wenn gegenseitig kein Theil der einen Kugel im Innern der andern liegt; welche beide Fälle als innere und äussere Berührung unterschieden werden.

§. 21.

Zwei Kugeln berühren sich von aussen, wenn der Abstand ihrer Centren der Summe ihrer Halbmesser gleich kommt.

Sind c und C (Fig. 7) die Centren beider Kugeln, r und R die entsprechenden Halbmesser und $c\,C$ eine durch die Centren gehende gerade Linie, so ist der Voraussetzung nach $c\,C = r + R$. Man bestimme in $c\,C$ einen Punct b dergestalt, dass $c\,b = r$, so ist $b\,C = R$ und daher b ein gemeinschaftlicher Punct beider Kugeln. Nun sey m ein Punct im Innern der Kugel C, so ist (nach §. 4) $m\,c + m\,C$ nicht kleiner als $c\,C$ oder $r + R$. Da nun $m\,C < b\,C$, so folgt $m\,c > b\,c$, d. h. es liegt kein Punct der Kugelfläche c im Innern der Kugel C.

Aehnlich findet man, dass kein Punct der Kugelfläche C innerhalb der Kugel c enthalten ist.

Da nun beide Kugeln erwiesenermasen einen Punct gemeinschaftlich besitzen, aber gegenseitig kein Punct der einen im Innern der andern sich befindet, so berühren sich dieselben von aussen.

§. 22.

Zwei Kugeln von verschiedenen Halbmessern berühren sich von innen, wenn der Abstand ihrer Centren dem Unterschied ihrer Halbmesser gleich kommt.

Digitized by Google

Sind C und k (Fig. 4) die Centren und C k g eine Centrilinie, so bestimme man einen Punct derselben sq, dass C g = R. Alsdann ist C g — k g = C k = R — k g, aber auch R — r ist der Voraussetzung nach = C k, mithin k g = r und g demnach ein gemeinschaftlicher Punct beider Kugeln. Nun sey n ein Punct ausserhalb der grössern Kugel C, so kann (nach §. 4) n C — n k nur entweder = oder < seyn als (C k = g C — g k. Ist nun n C — n k = g C — g k, so ist wegen n C > g C auch n k > g k. Ist aber n C — n k < g C — g k, so ist um so mehr noch n k > (g k = r).

Kein Punct also ausserhalb der grössern Kugel gehört der kleinern an, oder es liegt kein Punct der letzteren ausserhalb der andern. Erwiesenermasen haben aber beide Kugeln einen Punct mindestens mit einander gemein, es berühren sich dieselben sonach von innen.

§. 23.

Zwei Kugeln, deren Halbmesser zusammen den Abstand ihrer Centren nicht erreichen, haben keinen gemeinschaftlichen Punct, auch liegt keine derselben im Innern der andern.

Sind c und C (Fig. 8) die Centren, und macht man in einer Centrilinie das Stück c b = r, so ist c b + b C = r + b C = c C. Der Voraussetzung nach aber ist r + R < c C, mithin b C > R und b daher ein ausserhalb der Kugel C liegender Punct. Aber auch jeder andere Punct m der Kugel c liegt ausserhalb der Kugel C. Denn nach (§. 4) ist m c + m C nicht kleiner als c b + b C, daher auch m C nicht kleiner als b C, mithin > g C oder R. Es liegen also sämmtliche Puncte der Kugel c ausserhalb der Kugel C. Auf gleiche Weise findet man, dass auch alle Puncte der Kugel C ausserhalb der Kugel c sich befinden.

Es haben also beide Kugeln keinen gemeinschaftlichen Punct und liegt keine im Innern der andern.

§. 24.

Zwei Kugeln, deren Centren um weniger als den Unterschied ihrer Halbmesser entfernt sind, haben keinen gemein-

Digitized by Google

schaftlichen Punct, auch liegt die kleinere Kugel *gänzlich* im Innern der grössern.

Sind c und C (Fig. 9) die Centren, $gcCh$ eine Centrilinie, und macht man $ac=r$, so ist a ein Punct der Kugel c und bei der Voraussetzung $R-r>cC$.

$R>r+cC>ac+cC>aC$; mithin liegt der Punct a der kleinern Kugel c im Innern der Kugel C. Aber auch mit jedem andern Punct der Kugel c ist dies der Fall.

Denn, wenn möglich, sey m ein Punct beider Kugeln, so ist $mC-mc=R-r>cC$, was nach §. 4 nicht seyn kann, da eines Punctes Abstandsunterschied von zwei andern nur $=$ oder $<$ als der Abstand der letztern. Haben aber beide Kugeln keinen Punct gemeinschaftlich, so können sie sich auch nicht schneiden, und da nach Obigem ein Punct a der Kugel c im Innern von C liegt, so muss demzufolge die ganze Kugel c innerhalb der andern enthalten seyn.

§. 25.

Zwischen den Halbmessern zweier Kugeln und dem Abstand ihrer Centren können nur nachbemerkte Beziehungen stattfinden:

1. $R+r=cC$, daher $R-r$ oder $r-R<cC$.
2. $R-r$ oder $r-R=cC$, daher $R+r>cC$.
3. $R+r<cC$, daher $R-r$ oder $r-R<cC$.
4. $R-r$ oder $r-R>cC$, daher $R+r>cC$.
5. $R+r>cC$ und $R-r$ oder $r-R$ zugleich $<cC$.

Nach §. 21—24 findet in den Fällen 1 und 2 Berührung ohne Durchschnitt, in den Fällen 3 und 4 weder Berührung noch Durchschnitt statt. Hieraus folgt, dass wenn zwei Kugeln sich schneiden sollen, die Summe der Halbmesser grösser und ihr Unterschied zugleich kleiner als der Abstand der Centren seyn muss.

Noch aber ist zu zeigen, ob *überall*, wo $R+r>$ und $R-r$ oder $r-R<cC$, Durchschnitt der betreffenden Kugeln erfolgt.

Es sey nun $R+r>$ und $R-r$ oder $r-R<cC$, so können nur folgende Combinationen eintreten:

Digitized by Google

Das Centrum der einen Kugel liegt
entweder ausserhalb
oder auf der Oberfläche
oder im Innern
der andern Kugel.

Erster Fall: Liegt C (Fig. 4) ausserhalb der Kugel c und sind a und b die Durchschnittspuncte der Kugel c mit einer durch beide Centren gehenden geraden Linie, so fällt der eine Durchschnittspunct der Kugel C mit dieser Linie für *jede* Grösse des Halbmessers R ausserhalb der Kugel c, der andere dagegen in das Innere derselben, indem $R > bC$ und $< aC$.

Denn wegen $R + r > cC$ ist $R > cC - r > cC - bc > bC$, und wegen..... $R - r < cC$ ist $R < r + cC < ac + cC < aC$, für ..... $r - R < cC$ aber ist, da r für sich schon $< aC$, um so mehr.... $R < aC$.

Zweiter Fall: Fällt C (Fig. 5) auf die Oberfläche der Kugel c, so liegt für jede Grösse des Halbmessers R der eine Durchschnittspunct der Kugel C mit Cc ausserhalb der Kugel c, der andere Durchschnittspunct dagegen im Innern derselben. Für $R \leqq r$ ist letzteres an sich klar; für $R > r$ aber folgt dies aus der Voraussetzung $R - r < cC$, denn es ist hiernach $R < r + cC < ac + cC < aC$.

Dritter Fall: Liegt C im Innern der Kugel c, so fällt für $R \geqq r$ (Fig. 6) ein Durchschnittspunkt der Kugel C mit der Centrilinie ausserhalb der Kugel c, indem $Cb < r$, also auch $< R$; der andere Durchschnittspunct dagegen wegen $R - r < cC$ in das Innere der Kugel c. Denn es folgt hieraus $R < r + cC < ac + cC < aC$.

Für $R < r$ fällt ein Durchschnitt in das Innere von c, weil unter dieser Voraussetzung um so mehr noch $R < r + cC < ac + cC < aC$; der andere Durchschnitt dagegen fällt wegen $r - R < cC$ ausserhalb, denn es folgt hieraus $r < R + cC$ und da $r = bC + cC$, so ist auch $bC + cC < R + cC$, daher endlich auch $bC < R$.

Digitized by Google

Da nun in *allen* Fällen, in welchen die Summe der Halbmesser zweier Kugeln grösser und ihr Unterschied zugleich kleiner als der Abstand ihrer Centren, der eine Durchschnittspunct der *einen* Kugel mit einer Centrilinie in das Innere, der andere ausserhalb der andern Kugel fällt, so folgt (§. 18), dass zwei Kugeln sich in allen Eällen schneiden, wo die Summe ihrer Halbmesser grösser, der Unterschied derselben aber kleiner als der Abstand der Centren.

§. 26.

Zunächst ist nun zu untersuchen, ob der Durchschnitt zweier Kugeln in nur einem einzigen Kreis erfolgt, ob Kugeln ausser den Puncten eines Durchschnitts noch andere einem Durchschnitt nicht angehörige Puncte gemeinschaftlich haben können, endlich worin der Ort der Berührung zweier Kugeln besteht.

Denken wir uns zu diesem Ende (Fig. 10) in beliebigem Abstand zwei Puncte v und c und sey c Centrum einer Kugel mit constantem Halbmesser ca; jedoch kleiner als der Abstand vc. Ferner sey v Centrum einer Folge von Kugeln, deren Halbmesser von o anfangend bis zu jeder beliebigen Grösse stetig wachsen, es sey nemlich v das fixe Centrum einer veränderlichen Kugel, so wird, wenn man den veränderlichen Halbmesser mit r und den constanten mit k bezeichnet und eine, die constante Kugel c in a und b schneidende Centrilinie zieht, wo a zwischen v und c und b über c hinausliegt, nach den vorhergehenden Betrachtungen folgendes eintreten:

1. Für jedes veränderliche r zwischen den Grenzen va und vb oder $r+k>vc$ und $r-k<vc$ wird die constante Kugel von der veränderlichen geschnitten;
2. für $r=va$ oder $r+k=vc$ findet Berührung von aussen;
3. für $r=vb$ oder $r-k=vc$ Berührung von innen;
4. für $r<va$ und $>vb$ endlich oder $r+k<vc$ und $r-k>vc$ weder Durchschnitt noch Berührung statt.

Denken wir uns ferner eine Folge stetig wachsender Kugeln von $r=va$ bis zur Grösse $r=vb$, so ergiebt sich

Digitized by Google

hierdurch zugleich mindestens *eine* stetige Folge von Durchschnitten der veränderlichen Kugel mit der constanten, deren keiner mit einem andern einen gemeinschaftlichen Punct besitzt, weil keine zwei Durchschnitte derselben Grösse des veränderlichen Halbmessers entsprechen.

Zieht man endlich aus *a* nach *b* auf der Oberfläche der unveränderlichen Kugel *c* eine kugelische Linie der Art, dass von den stetig auf einander folgenden Puncten jeder einem andern dieser stetig folgenden Durchschnitte angehört, so wird dieser Construction zufolge von *a* anfangend jeder folgende Punct der kugelischen Linie von *v* einen grössern Abstand haben als jeder vorhergehende und der Endpunct *b* den grössten Abstand $= v\,b$ zeigen.

Ein jeder Punct *g* dieser Linie kann als einem Durchschnitt einer veränderlichen mit der constanten Kugel angehörig, in demselben sich bewegen, ohne seinen Abstand von den beiden Centren *v* und *c* zu ändern, er kann also um beide Centren in dem betreffenden Durchschnitt rotiren.

Macht nun *g* in dem betreffenden Kreis eine vollständige Rotation, so wird auch jeder andere Punct der Linie, wenn anders sein Ort nicht schon durch seine Abstände von den gegebenen Centren bestimmt war, oder seine Bewegung etwa deshalb unterbleiben muss, weil er sonst seinen Abstand von andern Puncten des Systems ändern würde, — nach §. 12 eine vollständige Rotation entweder zu machen gezwungen seyn, oder eine vollständige Rotation machen können.

Man lasse also die vollständige Rotation des Systems, der kugelischen Linie um die beiden Centren *v* und *c* eintreten, so wird nach dem Angeführten ein jeder Punct der Linie einen *besondern* Kreis beschreiben, keine zwei Kreise werden einen Punct mit einander gemein haben, ein jedes Stück *g h* der Linie durchläuft demnach (§. 10) einen Flächenraum, begrenzt von den durch seine Endpuncte durchlaufenen Kreisen, während die andere Grenze, welche die erzeugende Linie in ihrer anfänglichen und endlichen Lage

Digitized by Google

gebildet, durch das Wiedereintreffen in ihren ursprünglichen Ort verschwindet.

Des so durchlaufenen Flächenstückes sämmtliche Puncte sind von dem Centrum der constanten Kugel gleich weit entfernt, und zwar im Abstand $a\,c$, weil jedem Kreis der constante Halbmesser $a\,c$ angehört; die so gebildete Fläche ist daher ein Stück der constanten Kugel, eine Kugelzone des Halbmessers $a\,c$. Ein je grösseres Stück der kugelischen Linie zu beiden Seiten des gegebenen Punctes g rotirt, ein um so grösseres Stück der constanten Kugel wird durchlaufen, jeder Zuwachs der kugelischen Linie beiderseits führt also auch zu einem Zuwachs der Kugelzone, und zu einer Abnahme der blos von den Kreisen der Endpuncte der kugelischen Linie begrenzten Ergänzungsstücke.

Diese Ergänzungsstücke verschwinden sammt ihren Grenzen, den Kreisen, bis auf je einen Punct *alsdann und nicht eher*, als bis die Endpuncte der kugelischen Linie vom Centrum der veränderlichen Kugel die Abstandsgrenzen, unter denen beide Kugeln noch gemeinsame Puncte haben können, erreicht haben, nachdem nemlich $r = v\,a$ und $r = v\,b$ geworden ist, da bei diesen Grenzen, und zwar bei der Anfangsgrenze, *kein* Stück der constanten Kugel mehr in dem Innern der veränderlichen, und bei der Schlussgrenze kein Theil der constanten Kugel mehr ausserhalb der veränderlichen Kugel liegt, in beiden Fällen also das dort eindringende, hier austretende Ergänzungsstück der constanten Kugel und somit auch seine in sich zurückkehrende Grenze selbst in einen einzigen Punct verschwunden ist.

Bei diesen Grenzen also hat der Uebergang vom Durchschnitt zur Berührung statt. Die Berührungsorte sind Anfang und Schluss aller Durchschnitte, sie sind diejenigen Kreise, welche die völlig verschwundenen Ergänzungsstücke begrenzen. Sie sind die Anfangsglieder aller Kreise; sie sind mit einem Wort Puncte.

Die Puncte a und b der kugelischen Linie sind also die einzigen, welche bei der Rotation des Systems ihren Ort

Digitized by Google

nicht ändern. Die ganze kugelische Linie, deren Anfangs- und Endpunct jene Grenzabstände darbieten, beschreibt mithin bei der Rotation eines ihrer Puncte um die zwei Centren v und c eine völlig einschliessende, mit der constanten Kugel identische Fläche, indem jeder Punct dieser Fläche der Construction zufolge den Abstand ac vom Centrum c hat.

Auf der ganzen Kugel werden durch die von den einzelnen Puncten der kugelischen Linie durchlaufenen Kreise Zonenelemente gebildet, deren Grenzen einander stetig nahe sind, so nemlich, dass zwischen zweien unmittelbar auf einander folgenden Grenzen kein Punct mehr gedacht werden kann, und dass daher, wo immer man einen Punct auf der Kugelfläche annehmen mag, derselbe nothwendig in einem dieser stetig folgenden Kreise liegt.

Da nun eines jeden folgenden Kreises Puncte von v einen grössern Abstand haben als jeden vorhergehenden Kreises Puncte, da also jeder einem bestimmten Durchschnitt nicht angehörige Punct der constanten Kugel einen Abstand von v hat, entweder grösser oder kleiner als die Abstände, den die Puncte des Durchschnitts zeigen, so folgt, dass die constante Kugel von *jeder veränderlichen*, oder überhaupt, dass eine Kugel von einer andern in nur einem *einzigen* Kreise geschnitten werden kann und zwei Kugeln ausser den Puncten des Durchschnitts keine Puncte mehr gemeinschaftlich haben, indem der *einzige* Durchschnitt die Kugel in zwei Theile trennt, deren einer nur Puncte enthält in *kleineren*, der andere nur Puncte in *grösseren* Abständen vom Centrum der durchschneidenden Kugel, als ihn die Puncte des Durchschnitts zeigen.

Es folgt also auch, dass Berührung zweier Kugeln *nur* alsdann statt hat, wenn die Summe oder der Unterschied der Halbmesser gleich dem Abstand der Centren, und zwar in beiden Fällen nur in einem einzigen, in der geraden Centrilinie liegenden Puncte.

Bei unsern Betrachtungen giengen wir von der Voraussetzung aus, dass wenn ein Punct g der kugelischen Linie

Digitized by Google

rotirt, jeder andere Punct, dessen Ort nicht schon durch seinen Abstand von den gegebenen Centren bestimmt ist, gleichfalls rotiren müsse und nicht in Ruhe bleiben könne.

Die Annahme, als könnte ein Punct einer kugelischen Linie, der durch zwei Puncte noch nicht bestimmt ist, bei der Rotation des Systems in Ruhe bleiben, zeigt sich bei der Betrachtung als unstatthaft, dass in diesem Falle bei der Rotation der Linie mehrere völlig einschliessende und nur mit dem in Ruhe bleibenden Puncte verbundene Flächen entstünden, die ein und dasselbe Centrum hätten, was nach (§. 16) unmöglich.

§. 27.

In dem gegenwärtigen Paragraphen soll ein Ueberblick der hier gefundenen höchst wichtigen Kugelsätze mit einigen unmittelbar daraus abgeleiteten weitern Sätzen gegeben werden.

1. Zwei Kugeln schneiden sich in einem einzigen Kreise, wenn die Summe der Halbmesser grösser, ihr Unterschied aber kleiner als der Abstand der Centren.

2. Zwei Kugeln berühren sich von *aussen*, im Fall die Summe, und von *innen*, im Falle der Unterschied der Halbmesser dem Abstand der Centren gleich kommt, und zwar in einem einzigen der durch die Centren ziehenden geraden Linie angehörigen Punct.

3. Der Ort eines Punctes in gegebenen Abständen von zwei andern ist ein Kreis, wenn seine Abstandssumme von diesen Puncten grösser, sein Abstandsunterschied von denselben aber zugleich kleiner als der Abstand dieser Puncte. Zugleich sind letztere Centren dieses Kreises.

4. Der Punct ist durch seine Abstände von zwei andern bestimmt, wenn entweder die Summe oder der Unterschied dieser Abstände dem Abstand der gegebenen beiden Puncte gleich ist.

5. Durch zwei Puncte ist daher auch nur eine einzige Linie möglich, deren jeden Punctes entweder Abstandssumme oder Abstandsunterschied von den gegebenen Puncten dem Abstand derselben gleich ist.

Digitized by Google

Da nun der geraden Linie jeden Punctes entweder Abstandssumme oder Abstandsunterschied von jedem Paar ihrer Puncte gleich dem Abstand der letztern, so folgt, dass jede Linie dieser Eigenschaft eine gerade ist, und dass durch zwei Puncte nur eine einzige gerade, ein einziges Längenminimum gezogen werden kann.

6. Aus zwei Puncten lässt sich mit Halbmessern, deren Summe gleich oder kleiner, oder deren Unterschied gleich oder grösser als der Abstand dieser Puncte, kein Kreis construiren.

7. Aus jeden zwei Puncten lässt sich mit jeden zwei Halbmessern, deren Summe grösser und deren Unterschied zugleich kleiner als der Abstand dieser Puncte, ein Kreis, und zwar ohne Verwechslung der Halbmesser nur ein einziger construiren.

8. Ist in bestimmten Abständen von zweien Puncten mehr als ein Punct gegeben, so ist der letztern Abstandssumme von den erstern grösser, und ihr Abstandsunterschied von denselben zugleich kleiner als der Abstand beider Puncte.

9. Rotirt ein Punct einer geraden Linie um einen andern derselben, so rotiren alle andern Puncte der geraden und alle treten zugleich mit dem ersten in ihren ursprünglichen Ort wieder zurück.

Beschreibt der rotirende Punct eine in sich zurückkehrende kugelische Linie, so durchläuft die gerade Linie einen Flächenraum, dessen Grenze die von dem entferntesten Punct der geraden durchlaufene kugelische Linie ist.

10. Eines jeden ausserhalb einer geraden Linie befindlichen Punctes Abstandssumme von jedem Paar Puncte dieser Linie ist grösser und sein Abstandsunterschied von demselben zugleich kleiner als der Abstand des Punctenpaares.

11. Ein Punct kann mit zwei andern nur zweierlei Abstandsverhältnisse darbieten.

a. Entweder ist seine
Abstandssumme oder sein Abstandsunterschied von den beiden andern gleich dem Abstand der letztern,

Digitized by Google

b. oder es ist

seine Abstandssumme von den beiden andern grösser, sein Abstandsunterschied von denselben zugleich aber kleiner als der Abstand der letztern.

Je nachdem ein Punct mit zwei andern das erste oder das zweite Abstandsverhältniss darbietet, sagen wir, er bilde mit ihnen eine gerade oder krumme Ternion.

12. Bildet von drei Puncten der erste mit den beiden andern eine gerade oder krumme Ternion, so bildet auch der zweite mit dem ersten und dritten, und der dritte mit dem ersten und zweiten eine gerade, resp. krumme Ternion.

13. Jedem Punct einer Kugelfläche entspricht in grösstem Abstand $=2r$ auf der Oberfläche nur ein einziger Punct und zwar der Durchschnittspunct der durch den gegebenen Punct und das Centrum gehenden Geraden und der Kugel.

§. 28.

Bei einem Paar discret folgender Puncte kann zweierlei in Betrachtung kommen, erstlich ihr Abstand, sodann das, was durch sie bestimmt wird, also der Ort der durch sie gelegten geraden Linie.

Zwei stetig folgende Puncte haben keinen Abstand, die Betrachtung einer Grösse fällt bei ihnen hinweg, dagegen bestimmen auch sie wie zwei discrete Puncte den Ort einer geraden Linie. Die Unterscheidung zweier stetig folgenden Puncte als verschiedene Puncte ist daher in der letzten Beziehung nicht zwecklos.

Nach dem Vorhergehenden giebt es nur zweierlei Ternionen discret liegender Puncte, nemlich:

1) solche, deren jeden Punctes entweder Abstandssumme oder Abstandsunterschied von den beiden andern gleich ist dem Abstand der beiden andern;

2) solche, deren jeden Punctes Abstandssumme von den beiden andern grösser und Abstandsunterschied zugleich kleiner ist als der Abstand der beiden andern.

Bestände die Linie in einer Summe von Abständen discret auf einander folgender Puncte, so könnte dieser Umstand zur

Digitized by Google

Eintheilung der Linien benützt werden. Allein stetig folgende Puncte haben keinen Abstand, mithin besteht auch zwischen ihnen kein arithmetisches Abstandsverhältniss. Indessen giebt es wie bei discreten Ternionen auch bei den stetigen Ternionen nur zweierlei Arten.

Unterscheiden wir daher bei stetigen Ternionen den mittlern Punct von den beiden andern und bezeichnen ihn als Scheitel und die beiden andern als Nachbarpuncte, so liegt der Scheitel entweder in der durch die Nachbarpuncte gehenden geraden Linie oder nicht.

Wir wollen die Ternionen jener Art ebenfalls gerade Ternionen, die der andern Art krumme Ternionen nennen.

Die Linien aller Art enthalten daher nur zweierlei stetige Punctenternionen und lassen sich hiernach eintheilen:

1. in solche, deren sämmtliche Ternionen stetig folgender Puncte gerade sind;
2. in solche, deren sämmtliche Ternionen stetig folgender Puncte krumm sind;
3. in solche, deren Ternionen stetig folgender Puncte theils gerade, theils krumm sind.

Zu den Linien Ziff. 1 gehört einzig die gerade Linie und für sie haben wir bereits (§. 27) eine von stetigen Ternionen unabhängige Definition gewonnen. Die Linien Ziff. 2 heissen krumme Linien oder Curven; die Linien Ziff. 3 gemischte Linien im weitesten Sinne.

Unter den gemischten Linien sind besonders hervorzuheben Linien, deren einzelne Ternionen stetig folgender Puncte mit entfernt folgenden Scheiteln krumm, alle übrigen Ternionen aber gerade sind. Solche Linien führen den Namen gebrochene Linien und im Falle eine gebrochene Linie nur eine einzige krumme Ternion stetig folgender Puncte enthält, Winkellinien oder schlechtweg Winkel.

Winkel ist also eine aus zwei einseits begrenzten geraden Linien in ihren Grenzen derart zusammengesetzte Linie, dass keine derselben mit der andern oder ihrer Verlängerung zusammenfällt, beide verlängert ausser dem Vereinigungs-

Digitized by Google

punct keinen andern Punct mehr gemeinschaftlich haben. Der Vereinigungspunct heisst, wie oben bemerkt, Scheitel, und die den Winkel bildenden geraden Linien Schenkel.

Eine aus einem Punct des einen Schenkels nach einem Punct des andern Schenkels gezogene gerade Linie hat mit beiden geraden ausserdem keinen Punct gemein, weil sie sonst mit der ganzen Winkellinie zusammenfallen müsste, was unmöglich. Es bildet daher auch diese Verbindungslinie mit jeder der beiden Schenkel einen Winkel und es entsteht durch die geradlinige Verbindung eines Schenkelpunctes mit einem Punct des zweiten Winkelschenkels eine dreiwinklige oder dreimal gebrochene, einschliessende Linie, genannt Dreieck, eine Figur von drei Seiten und drei Winkeln, eine Figur, deren jede Seite als Längenminimum, dergleichen zwischen zwei Puncten nur ein einziges möglich, eine kleinere Länge besitzt als die beiden andern zusammengenommen; daher auch der Winkel als eine derartige Verbindung zweier geraden in ihrem einen Ende bezeichnet werden kann, bei welcher der Abstand eines jeden Punctes des einen Schenkels von jedem Punct des andern Schenkels kleiner als die Abstandssumme beider Puncte vom Scheitel.

So wie die Winkel- und gebrochene Linie sich von der geraden Linie nur dadurch unterscheidet, dass jene nur ausnahmsweise einen oder einzelne krumme Ternionen stetig folgender Puncte mit discret auf einander folgenden Scheiteln enthält, so sind auch umgekehrt Linien möglich, die sich von den Curven durch den Besitz einzelner geraden Ternionen stetig folgender Puncte unterscheiden und die dann nach der hier gegebenen Definition strenge genommen nicht mehr zu den Curven gehören, gleichwohl aber diesen beigezählt und als Curven mit besondern Puncten, deren es mancherlei giebt, bezeichnet werden.

Da in der Regel alle Ternionen stetig folgender Puncte der Curven krumm sind, d. h. der Art, dass keine drei stetig folgende Puncte in derselben geraden Linie liegen, so folgt, dass wie klein immer ein Curvenstück genommen werden

Digitized by Google

mag, dasselbe nicht mit allen Puncten in das seine Endpuncte verbindende Stück gerader Linie fallen kann, weil wenn z. B. ausser dem Endpunct noch der erste stetig folgende Punct in die gerade fiele, der Definition der Curve zufolge nicht auch der zweite stetig folgende Punct in dieselbe Gerade fallen könnte.

Nun ist aber (§. 3) ein Linienstück, dessen nur ein Punct ausserhalb der durch seine Grenzen gelegten geraden Linie sich befindet, von grösserer Länge als dieses Stück gerader Linie, deshalb lassen sich die Curven, will man die Einführung stetiger Ternionen umgehen, auch definiren als Linien, deren jeden Stückes Länge grösser als das seine Grenzen verbindende gerade Linienstück, wie klein immer das Curvenstück gedacht werden mag.

§. 29.

So wie die gerade Linie bestimmt ist durch zwei Puncte, so ist der Winkel bestimmt durch drei Puncte, und zwar durch den Scheitel als gemeinschaftlichen Punct beider Schenkel und zwei andere den beiden Schenkeln angehörige Puncte.

Dabei müssen die drei Puncte eine krumme Abstandsternion oder eine krumme stetige Ternion bilden, weil andernfalls durch diese drei Puncte nur eine einzige gerade Linie möglich wäre und sonach kein Winkel entstände.

So wie durch zwei Puncte ferner nur der Ort der geraden, nicht aber ihre Länge, sofern sie nicht als Grenzpuncte bezeichnet werden, bestimmt ist, so wird durch drei Puncte auch nur der Ort der Winkellinie, nicht aber die Länge der Schenkel bestimmt.

Indessen ist es auch in der Regel nicht die Länge der Winkellinie, welche in der Geometrie untersucht zu werden pflegt; sondern es sind diess gewisse Grössen, als Linien, Flächen, welche zur Winkellinie in bestimmter Beziehung stehen, und worüber das Nöthige in der Folge gesagt werden wird. Vorerst ist lediglich die Betrachtung zweier Winkel dahin nöthig, ob dieselben einander gleich sind oder

Digitized by Google

nicht, d. h. ob Scheitel und Schenkel des einen Winkels mit Scheitel und Schenkel des andern Winkels über einander gebracht werden können oder nicht, wobei die Schenkellänge der beiden Winkel ganz gleichgültig ist und bei gleichen Winkeln verschieden, und umgekehrt bei verschiedenen Winkeln gleich seyn kann.

§. 30.

Sind zwei Puncte Centren eines Kreises, so sind auch alle Puncte der durch dieselben gehenden geraden Linie Centren desselben, oder die gerade Linie ist Centrilinie eines Kreises, sobald nur zwei ihrer Puncte Centren desselben sind.

Ist (Fig. 2) b ausserhalb der Geraden ac und sind a und c beliebige Puncte der letztern, so ist $ab + bc >$ und $ba - bc$ oder $bc - ba < ac$ und es gehört der Punct b einem Kreis an, dessen Centren a und c sind. Nun bilde man das Dreieck abc, und rotire des Systems Spitze b um die Centren a und c, so rotiren nach (§. 27) zugleich alle Puncte der ba und bc um a und c, während die Puncte der Geraden ac ihren Ort hierbei nicht ändern können, da die gerade Linie ac durch die beiden Puncte a und c bestimmt ist. Das System selbst erleidet aber in den Abstandsverhältnissen der einzelnen Puncte während der Bewegung keine Aenderung, es bleibt also der Punct b bei der Rotation von jedem Punct h oder m der Geraden ac unverändert in seinem einmal gegebenen Abstand, oder es sind alle Puncte des von b beschriebenen, den Centren a und c entsprechenden Kreises zugleich auch von jedem andern, seinen Ort während der Rotation nicht ändernden Punct der geraden ac gleich weit entfernt, oder es ist, wenn a und c Centren des von b beschriebenen Kreises sind, auch jeder andere Punct der durch a und c gehenden geraden Linie Centrum dieses Kreises.

§. 31.

Congruent nennt man nicht denselben Ort im Raum einnehmende Raumgrössen, wenn ohne Aenderung irgend eines

Digitized by Google

darin vorkommenden Grössenverhältnisses die eine durch Bewegung mit der andern der Art vereinigt werden kann, dass wechselsweise jeder Punct der einen Raumgrösse zugleich Punct der andern ist.

Bei jedem Paar congruenter gebrochener Linien müssen die einzelnen Seiten der einen Figur den einzelnen Seiten der andern in derselben Ordnung und ebenso die correspondirenden Winkel in beiden einander gleich seyn; eine Folge des Uebereinanderlegens der Seiten ist nemlich die Gleichheit der correspondirenden Seiten und Winkel. Nicht umgekehrt folgt nothwendig die Congruenz der Figuren aus der Gleichheit der correspondirenden Seiten und Winkel.

§. 32.

Zwei Dreiecke sind congruent, daher auch die Winkel des einen den correspondirenden Winkeln des andern gleich, wenn die Seiten des einen einzeln genommen den Seiten des andern einzeln genommen gleich sind.

Sind ac, ab und bc in dieser Ordnung gleich den gleichnamigen Seiten AC, AB, BC, so denke man sich a, b, A und B als Centren von Kugeln, deren Halbmesser in derselben Ordnung ac, bc, AC und BC sind.

Bringt man nun die Kugel ac mit ihrem Centrum nach A und jene bc mit ihrem Centrum nach B, so bleibt der Abstand der Centren a und b unverändert und die Gerade ab fällt mit jener AB zusammen; desgleichen fallen nun auch die Oberflächen der Kugeln a und A, so wie jene der Kugeln b und B, als Flächen concentrischer Kugeln gleich grosser Halbmesser zusammen, und somit auch der Durchschnitt der Kugeln a und b mit jenem der Kugeln A und B.

Hieraus folgt, dass sobald das Dreieck abc mit jenem ABC der Art vereinigt wird, dass a auf A und b auf B fällt, die Scheitel c und C in einem und demselben Kreise liegen, nemlich in dem Kreise, der den Centren A und B und den Halbmessern $ac = AC$ und $bc = BC$ entspricht und dass daher des Dreiecks abc Spitze c entweder mit dem Eintritt der Puncte a und b in A und B mit der Spitze C

Digitized by Google

zusammenfällt oder durch Rotation um ab sofort mit C vereinigt werden kann.

Liegt nun aber c in C, so fällt auch die Gerade ac mit AC und bc mit BC zusammen, es decken sich also die Seiten beider Dreiecke wechselseitig, oder es liegt wechselseitig kein Punct des einen Dreiecks ausserhalb dem andern, die Dreiecke sind congruent, und demnach auch die von den sich deckenden Seiten gebildeten Winkel einander gleich.

§. 33.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks zweien Seiten eines andern einzeln genommen und überdies die von ihnen gebildeten Winkel in beiden einander gleich sind, so sind diese Dreiecke congruent, daher alle übrigen correspondirenden Stücke, als die dritte Seite und die beiden andern Winkel einzeln genommen in beiden Dreiecken einander gleich.

Sind nemlich die gedachten Winkel gleich, so lassen sich Scheitel und Schenkel beider über einander bringen. Geschieht dies nun in der Weise, dass die correspondirenden Schenkel resp. Seiten zusammen fallen, so treffen auch die Endpuncte der letztern in beiden Dreiecken zusammen, mithin auch die dritten Seiten, also die ganzen Dreiecke.

§. 34.

Zwei Winkel sind einander gleich, wenn die Schenkelstücke in beiden einzeln von gleicher Länge vorausgesetzt, die Endpuncte der Schenkel in beiden Winkeln denselben Abstand haben; weil in diesem Falle die Dreiecke, welche durch Verbindung dieser Endpuncte mittelst einer geraden Linie entstehen, drei Seiten einzeln gleich haben, daher nach (§. 32) auch die correspondirenden Winkel gleich sind.

§. 35.

Zwei Winkel sind einander nicht gleich, wenn unter obiger Voraussetzung die die Schenkelenden verbindenden geraden Linien ungleich sind.

Wären die Winkel nemlich gleich, so müssten nach (§. 33)

Digitized by Google

auch diese geraden Verbindungslinien es seyn, was der Annahme widerspricht.

§. 36.

Hat ein Winkel mit einem andern den Scheitel und einen Schenkel gemein, so sind beide einander gleich, sobald ein Punct des zweiten Schenkels des einen Winkels demselben Kreis angehört, den der in gleichem Abstand vom Scheitel liegende Punct des zweiten Schenkels des andern Winkels bei Rotation des Winkels um den Scheitel und den gemeinschaftlichen Schenkel beschreibt. Andernfalls sind beide Winkel ungleich.

Denn sind c und cb (Fig. 11) der gemeinschaftliche Scheitel und Schenkel der Winkel acb und gcb, und ist $ac = gc$ und m der durch Rotation des Punctes g um cb beschriebene Kreis, so ist, sobald der Punct a dem Kreis m angehört, $ab = gb$, daher wegen Congruenz der Dreiecke acb und gcb auch der Winkel acb gleich dem correspondirenden Winkel gcb.

Liegt aber a nicht im Kreis m, so ist, da zwei gegebene Kugeln sich nur in einem einzigen Kreise schneiden, bei der Voraussetzung $ac = cg$, der Abstand ab von jenem gb, und demzufolge nach (§. 35) auch der Winkel acb von jenem gcb verschieden.

§. 37.

Eine Fläche, durch deren jede zwei Puncte sich eine gerade Linie ziehen lässt, deren sämmtliche Puncte in die Fläche fallen, heisst ebene Fläche oder Ebene.

Eine Fläche, deren kein Theil eben, heisst krumme Fläche.

§. 38.

Werden die beiden Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so entstehen drei weitere Winkel, nemlich:

a ein Winkel, den der erste Schenkel des gegebenen Winkels mit der Verlängerung des zweiten,

b ein Winkel, den der zweite Schenkel des gegebenen mit der Verlängerung des ersten,

Digitized by Google

c ein Winkel, den die beiden Verlängerungen mit einander bilden.

Von diesen vier Winkeln heissen jede zwei, die einen gemeinschaftlichen Schenkel besitzen, Nebenwinkel und jede zwei, die keinen gemeinschaftlichen Schenkel haben, Scheitelwinkel.

Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so heissen sie rechte Winkel, der gemeinschaftliche Schenkel gleicher Nebenwinkel wird Senkel oder Loth auf die andern in einziger gerader Linie liegenden Schenkel genannt.

§. 39.

Ist $a\,b$ eine gerade Linie, und ein Punct h ausserhalb dieser Geraden von zweien Puncten a und b derselben gleich weit entfernt, so steht die durch h und die Mitte von $a\,b$ ziehende Gerade senkrecht auf letzterer, auch hat sofort jeder andere Punct des Senkels von den gedachten Puncten a und b nicht nur, sondern von jedem andern Paar Puncte p und q der Geraden $a\,b$ gleichen Abstand, welche vom Fusspunct c des Senkels gleich weit entfernt sind.

Sätze, deren Richtigkeit aus der Congruenz der betreffenden Dreiecke erhellt.

§. 40.

Macht (Fig. 12) der Punct g des im vorigen Paragraphen bezeichneten Systems eine vollständige Rotation um die Puncte a und b, so verlässt der Fusspunct c des Senkels als Punct der Geraden $a\,b$ seine Stelle nicht; es ist also dieser Punct gleichfalls fixes Centrum und es beschreibt (§. 27) dabei der Senkel eine Fläche, begrenzt von dem durch den Endpunct der Geraden beschriebenen Kreis.

Ein jeder Punct der so erzeugten Fläche ist, wenn die Puncte a und b der Rotationsachse vom Fusspunct c des rotirenden Senkels gleichen Abstand haben, nach dem vorhergehenden Paragraphen vom einen dieser Puncte soweit entfernt wie vom andern, weil jeder als Punct des Senkels in irgend einer bei der Rotation eingenommenen Lage erscheint.

Digitized by Google

Ein jedes Paar Puncte a und b der Rotationsachse in gleichem Abstand vom Fusspunct des Senkels wollen wir Richtpunctenpaar oder correspondirende Richtpuncte; die Rotationsachse Richtinie der Fläche, diese selbst ferner rechtwinklige Rotationsfläche, den rotirenden Senkel endlich Erzeugungslinie nennen.

§. 41.

Jeder Punct, der von einem unter zwei correspondirenden Richtpuncten einer rechtwinkligen Rotationsfläche so weit entfernt ist wie vom andern, liegt nothwendig in dieser Fläche; jeder ausserhalb derselben befindliche Punct hat von den correspondirenden Richtpuncten daher ungleiche Abstände.

Ist (Fig. 12) ck die Erzeugungs-, ab die Richtlinie und a und b ein Paar correspondirender Richtpuncte, so hat von allen Puncten der Erzeugungslinie der Fusspunct c den kleinsten Abstand von a und b, da $ag+gb>ab>ac+cb$, daher $ag>ac$; es ist ferner $ga>gc-ca$; wächst nun gc ohne Ende, während ca constant bleibt, so wächst auch ga ohne Ende und da eine stetige Veränderung von gc nur eine stetige Aenderung von ga nach sich ziehen kann, so folgt, dass es keinen ca übersteigenden Abstand zweier Puncte giebt, der nicht gleich käme dem Abstand irgend eines Punctes der Erzeugungslinie vom Richtpunct a; und hieraus ferner, dass auch die Rotationsfläche selbst Puncte in jedem nur denkbaren, ca übersteigenden Abstand von den Richtpuncten enthalten muss, deren Ort ein vom betreffenden Punct der Erzeugungslinie durch Rotation um die gegebenen Richtpuncte beschriebener, also in der Rotationsfläche liegender Kreis ist. Nun giebt es aber für jedes Paar unter sich gleicher Halbmesser aus gegebenen correspondirenden Richtpuncten nur einen einzigen Kreis, dieser liegt in der Rotationsfläche, jeder Punct ferner, der von zweien solcher Puncte gleichen Abstand hat, liegt in einem dieser Kreise, daher auch in der rechtwinkligen Rotationsfläche, und hieraus folgt, dass jeder ausserhalb derselben befindliche Punct von

Digitized by Google

zwei correspondirenden Richtpuncten der Fläche ungleiche Entfernungen hat.

§. 42.

Aus jeden zwei Puncten einer rechtwinkligen Rotationsfläche lässt sich mit Halbmessern gleich den Abständen von jedem beliebigen Richtpunct ein durch diesen und den correspondirenden Richtpunct gehender Kreis construiren.

Sind a und b (Fig. 13) zwei beliebige Puncte der Rotationsfläche, g und h irgend zwei correspondirende Richtpuncte derselben, so ist

$$g\,a = h\,a$$
$$\text{und } g\,b = h\,b,$$

daher auch nach (§. 27)

$$g\,a + g\,b > a\,b \text{ und}$$
$$\left.\begin{matrix} g\,a - g\,b \\ \text{oder } g\,b - g\,a \end{matrix}\right\} < a\,b,$$

folglich lässt sich nach demselben Paragraphen aus a und b mit den Halbmessern $g\,a$ und $g\,b$ ein durch die Richtpuncte g und h gehender Kreis construiren.

§. 43.

Existenz der Ebene.

Die rechtwinklige Rotationsfläche ist eine Ebene.

Man lege durch zwei beliebige Puncte a und b der Fläche eine gerade Linie und construire, was nach dem vorigen Paragraphen möglich, aus diesen Puncten einen durch irgend zwei correspondirende Richtpuncte g und h gehenden Kreis, so ist nach (§. 30) auch jeder andere Punct p der Geraden $a\,b$ Centrum dieses Kreises, es hat also jeder andere Punct p dieser Geraden auch von den correspondirenden Richtpuncten g und h als Kreispuncten gleichen Abstand und erscheint demgemäss (§. 41) zugleich als Punct der Rotationsfläche.

Die durch zwei beliebige Puncte einer rechtwinkligen Rotationsfläche ziehende gerade Linie liegt also mit allen Puncten in dieser Fläche. Es ist diese Fläche somit eine Ebene.

Digitized by Google

§. 44.

Die aus einem Punct im Innern eines völlig begrenzten Ebenenstücks in der Ebene gezogene, beiderseits unbegrenzte gerade Linie durchdringt die Grenze dieses Flächenstücks beiderseits in mindestens einem Punct.

Denn ein jeder Punct c (Fig. 14) im Innern des Ebenenstücks hat von jedem andern Punct des Innern, so wie der Grenze einen bestimmten übersteiglichen Abstand. Da nun die durch c gehende, in der Ebene liegende Gerade beiderseits von c in jedem beliebigen Abstand einen Punct hat, also auch Puncte in Abständen, die den Abstand aller Puncte des Ebenenstückes und seiner Grenze von c übertreffen, so sind Puncte p und q der Geraden ausserhalb des begrenzten Ebenenstücks und zwar in beiden Theilen der Geraden enthalten, daher muss zwischen c und q sowohl als auch zwischen c und p mindestens ein Durchschnitt der Geraden mit der Grenzlinie erfolgen.

§. 45.

Wenn eine Ebene mit einer andern oder einer rechtwinkligen Rotationsfläche drei in krummer Ternion befindliche Puncte gemein hat, so sind sie identisch, d. h. es ist sofort wechselsweise jeder Punct der einen Ebene zugleich Punct der andern, resp. der Rotationsfläche; auch sind alle Ebenen zugleich rechtwinklige Rotationsflächen.

Durch drei nicht in gerader Linie liegende Puncte, durch ein Dreieck oder durch zwei nur einen Punct gemeinschaftlich besitzende gerade Linien ist daher auch nur eine einzige Ebene, eine einzige rechtwinklige Rotationsfläche möglich, die Ebene ist durch drei Puncte in krummer Ternion bestimmt.

Sind a, b und c (Fig. 15) gemeinschaftliche Puncte zweier Ebenen I und II. und liegen diese Puncte in krummer Ternion, so liegen auch die Geraden ab, bc, ac in beiden Ebenen zugleich. Nun ziehe man aus irgend einem Punct m im Innern der in der Ebene I liegenden Dreiecksfläche eine unbegrenzte Gerade hk in I, so wird diese die in beiden Ebenen zugleich liegende Grenze beiderseits in mindestens

Digitized by Google

einem Puncte, also im Ganzen mindestens in zwei Puncten durchdringen. Alsdann aber hat die Gerade kk mit beiden Ebenen zwei Puncte gemein, liegt also mit allen Puncten, also auch mit dem Punct m in beiden Ebenen zugleich. Es ist mithin jeder Punct im Innern des der Ebene I angehörigen Dreiecks zugleich Punct der Ebene II.

Aber auch jeder Punct n der Ebene I ausserhalb der Dreiecksgrenze ist zugleich Punct der Ebene II. Denn verbindet man einen solchen Punct n der Ebene I mit dem Punct m der Ebene (I und II) durch eine Gerade mn, so muss diese als in der Ebene I liegend die Grenze des Dreiecks in irgend einem Punct r durchdringen. Alsdann hat diese Gerade mit beiden Ebenen zwei Puncte m und r gemein, also alle Puncte, und es ist mithin auch n ein gemeinschaftlicher Punct beider Ebenen.

Folgerung.

Da die Eigenschaft der rechtwinkligen Rotatationsfläche, dass eines jeden Punctes Abstand von einem unter zwei correspondirenden Richtpuncten gleich ist dem Abstand vom andern derselben, nur der Rotationsfläche zukommt (§. 41) und jede Ebene zugleich eine rechtwinklige Rotationsfläche ist, so ist jene Eigenschaft auch ein ausschliessliches Merkmal der Ebene und es lässt sich mithin die Ebene unabhängig von der geraden Linie definiren als Fläche und Ort aller Puncte, deren jeder von einem unter zwei gegebenen Puncten so weit entfernt ist wie vom andern.

§. 46.

Die Ebene besitzt nicht blos für einen bestimmten Punct, den wir früher als Scheitel bezeichneten, sondern für jeden Punct eine Richtlinie.

Man denke sich zwei Ebenen I und II durch Rotation einer Erzeugungslinie um die Richtlinie entstanden, und zwar die Ebene I in Verbindung mit der Richtlinie selbst. Vereinigt man nun den Fusspunct der Richtlinie der Ebene I mit einem beliebigen Punct der Ebene II, und rotirt die Ebene I um diesen Punct, bis noch zwei andere mit ihm in krummer

Digitized by Google

Ternion befindliche Puncte in II gefallen, so sind beide Ebenen identisch und die Richtlinie der Ebene I ist somit auch zugleich Richtlinie der Ebene II in dem willkürlich gewählten Punct.

§. 47.

Erstreckt sich eine Ebene durch drei Puncte in krummer Ternion, eine andere aber nur durch zwei dieser Puncte, so haben beide Ebenen die durch beide gemeinschaftliche Puncte sich erstreckende gerade Linie, ausserdem aber keinen Punct mit einander gemein.

Denn die durch beide Puncte gehende Gerade liegt in beiden Ebenen zugleich, da sie mit beiden zwei Puncte gemein hat. Besässen die Ebenen nun noch einen dritten, nicht in dieser Geraden liegenden Punct gemeinschaftlich, so fielen beide gänzlich zusammen, mithin wäre auch der dritte Punct der gegebenen Ternion gemeinschaftlicher Punct beider Ebenen, was der Annahme widerspricht.

§. 48.

Eine Linie, deren sämmtliche Puncte in ein und derselben Ebene liegen, deren jeder Punct also von einem unter zwei gegebenen Puncten so weit wie vom andern entfernt ist, heisst ebene Linie.

Hiernach sind von allen Kreisen zunächst diejenigen ebene Linien, die als Durchschnitt zweier Kugeln von gleichen Halbmessern erscheinen.

§. 49.

Keine in sich zurückkehrende ebene Linie hat in ihrer Ebene ausserhalb des von ihr begrenzten Ebenenstücks ein Centrum.

Ist (Fig. 14) $x\,y$ die ebene Linie, q ein Punct der Ebene ausserhalb und c ein solcher innerhalb des begrenzten Ebenenstücks, so erfolgt, da alle Puncte der durch q und c gehenden Geraden in der Ebene liegen, zwischen q und c mindestens *ein* Durchschnitt r und in der über c hinaus gehenden Verlängerung abermals mindestens *ein* Durchschnitt s. Alsdann ist $q\,r$ als Theil von $q\,s$ kleiner als $q\,s$, also q kein Centrum der einschliessenden Linie.

Digitized by Google

§. 50.

Liegt das Centrum einer ebenen kugelischen Linie in der Ebene der Linie, so schneidet die durch dasselbe in der Ebene gezogene gerade Linie die kugelische Linie beiderseits in nur einem Punct; eine Folge des Satzes, dass die Gerade in jedem Abstand von jedem ihrer Puncte zur nemlichen Seite nur einen einzigen Punct enthält.

§. 51.

Ist ein Ebenenstück von einer kugelischen Linie, deren Centrum sich in der Ebene der Linie befindet, begrenzt, so hat jeder Punct im Innern der begrenzten Fläche von dem Centrum einen geringern, jeder Punct der Ebene ausserhalb des begrenzten Ebenenstücks von demselben einen grössern Abstand als die Puncte der kugelischen Linie.

Man ziehe (Fig. 3) durch das Centrum c und einen innern Punct g die Gerade cg und verlängere dieselbe, bis sie die Linie durchschneidet. Ist nun k ein Punct der Geraden ausserhalb der begrenzten Fläche, so erfolgt der einzig mögliche Durchschnitt des Theils ck zwischen g und k, z. B. in b, mithin ist $cg < cb$. Zieht man ferner aus c nach einem ausserhalb des begrenzten Flächenstücks liegenden Punct der Ebene die Gerade ck, so erfolgt Durchschnitt zwischen c und k, z. B. in q: daher ist $ck > cq$.

§. 52.

Eine ebene kugelische Linie hat in der Ebene der Linie keine zwei Centren. Besitzt sie daher ausser dem Centrum in ihrer Ebene deren noch andere, so liegen dieselben ausserhalb der Ebene.

Man ziehe (Fig. 3) durch ein Centrum c und einen andern Punct g im Innern des von der kugelischen Linie begrenzten Ebenenstücks die Gerade ga, so ist

$$ag = r + cg,$$
$$bg = r - cg,$$

es haben also a und b von g verschiedene Abstände und g ist daher kein Centrum der Linie.

Digitized by Google

§. 53.

Jede ebene kugelische Linie, deren Centrum in der Ebene der Linie, ist ein Kreis.

Ist ap (Fig. 16) diese Linie, so construire man in deren Centrum eine Richtlinie bg auf der Ebene, mache $bc = cg$, errichte in c eine rechtwinklige Erzeugungslinie ca, mache $ca =$ dem Halbmesser der kugelischen Linie, rotire das System um die Puncte b und g; so beschreibt der Punct a einen Kreis, der sämmtliche Puncte der bg zu Centren hat, zugleich aber durchläuft dieser Punct a der Construction zufolge die gegebene kugelische Linie selbst, es ist also diese mit dem beschriebenen Kreise identisch, und daher jede ebene Linie mit einem Centrum in der Ebene ein Kreis.

§. 54.

Ist am (Fig. 3) eine gerade Linie, c ein Punct ausserhalb derselben und haben zwei Puncte a und m von c verschiedene Abstände, so giebt es mindestens noch einen Punct n in der Geraden, dessen Abstand von c dem grössern der erst genannten Abstände gleich kommt.

Man lege durch a, c und m eine Ebene, ziehe aus c mit ca dem grössern der beiden Abstände einen Kreis in dieser Ebene, so liegt der Punct m in dessen Innern, und es muss die durch a und m gehende Gerade bei gehöriger, über m hinaus gehender Verlängerung den Kreis in mindestens noch einem Puncte n durchdringen. Alsdann ist $cn = ca$, was zu erweisen war.

§. 55.

Jeder Kreis ist eine ebene Linie.

Der Kreis erscheint als Durchschnitt zweier Kugeln von entweder gleichen oder verschiedenen Halbmessern. Sind die Halbmesser gleich, so ist der Kreis nach §. 48 eine ebene Linie. Sind die Halbmesser aber verschieden, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen in der durch die beiden Centren gehenden Centrilinie mindestens ein anderer Punct, von welchem die Puncte des Umfangs den-

Digitized by Google

selben Abstand haben, wie vom entfernteren der gegebenen zwei Centren.

Es besitzt also jeder Kreis das Criterium der ebenen Linien.

Anmerkung. Wenn künftig vom Centrum eines Kreises die Rede, ist das in seiner Ebene liegende, und unter Halbmesser die aus diesem Centrum nach dem Umfang gezogene gerade Linie zu verstehen.

§. 56.

Der Ort der gemeinschaftlichen Puncte zweier und mehrerer in derselben Ebene liegenden Kreise heisst Berührungsort, wenn entweder kein Theil der einen Kreisfläche ausserhalb der andern, oder wenn wechselsweise kein Theil der einen Kreisfläche im Innern der andern liegt; welche beide Fälle als innere und äussere Berührung unterschieden werden. Ob und in wie fern diese besondere Begriffsbestimmung der Berührung zweier Kreise mit der später gegeben werdenden allgemeinen Begriffsbestimmung der Berührung von Linien harmonirt, wird am gehörigen Ort erörtert werden.

§. 57.

1. Zwei in derselben Ebene liegende Kreise schneiden sich alsdann, wenn die Summe der Halbmesser grösser, ihr Unterschied aber kleiner als der Abstand ihrer Centren, und zwar in mindestens zwei Puncten.

2. Zwei in derselben Ebene befindliche Kreise berühren sich von aussen, im Falle die Summe, von innen, im Falle der Unterschied ihrer Halbmesser gleich ist dem Abstand ihrer Centren, und zwar nur in einem einzigen mit den beiden Centren in gerader Linie, bei äusserer Berührung zwischen den Centren, bei innerer Berührung aber nicht zwischen den Centren liegenden Punct.

3. Zwei Kreise endlich in derselben Ebene, deren Halbmessersumme kleiner oder Unterschied grösser als der Abstand der Centren, haben keinen gemeinschaftlichen Punct, sie schneiden und berühren sich nicht, auch liegt im ersten Falle wechselsweise kein Kreis in der Fläche des andern,

Digitized by Google

im zweiten und nur bei ungleichen Halbmessern eintretenden Falle aber der kleinere Kreis im Innern des grössern.

Die Richtigkeit dieser Sätze ergiebt sich theils durch ähnliche Betrachtungen, wie sie bei Aufsuchung der Bedingungen des Berührens, Schneidens und des völligen Getrenntseyns zweier Kugeln angestellt worden sind, theils aber auch und einfacher noch aus bereits erwiesenen Eigenschaften der geraden Linie.

§. 58.

Bildet eine gerade Linie mit einer andern und deren über den Scheitel gehenden Verlängerung gleiche Nebenwinkel, so bildet auch letztere mit jener ersten Geraden und ihrer über den Scheitel sich erstreckenden Fortsetzung gleiche Nebenwinkel; auch sind die hierbei entstehenden Scheitelwinkel einander gleich.

Ist (Fig. 17) der Winkel $x = y$ und rotirt gc um die unbewegliche Achse ab, so entsteht eine Ebene, der Punct g beschreibt in derselben um c einen Kreis und es wird, wenn man gc verlängert und $cm = cg$ macht, m ein Punct dieses Kreises seyn, und g daher bei der Rotation durch m gehen; alsdann hat cg mit der Verlängerung zwei Puncte c und m gemein, fällt also mit ihr zusammen, und hieraus folgt die Gleichheit der Winkel acm und acg oder $p = x$; es ist aber $x = y$, folglich auch $p = y$. Auf ähnliche Art findet man $q = y$ und $q = x$.

§. 59.

Durch einen Punct einer geraden Linie giebt es auf dieselbe in der nemlichen Ebene nur ein einziges Senkel.

Ist gc (Fig. 17) ein Senkel auf ab, so denke man sich durch beide Geraden eine Ebene gelegt, betrachte ferner ab als Richt- und cg als Erzeugungslinie einer Rotationsfläche oder Ebene, alsdann ist cg gemeinschaftliche Linie beider Ebenen, und beide besitzen ausser den Puncten dieser Geraden keinen andern Punct mehr gemeinschaftlich. Nun hat jeder ausserhalb dieser Rotationsfläche befindliche, also auch jeder dem Senkel cg nicht angehörige Punct h der Ebene agb

Digitized by Google

von den Richtpuncten a und b ungleiche Abstände, deshalb sind auch die Winkel acb und bcb von einander verschieden. Es giebt also im Punct c in der Ebene agb nur ein einziges Senkel auf ab. Auch folgt, dass alle rechte Winkel einander gleich sind.

§. 60.

Der Durchmesser theilt den Kreis und die von ihm begrenzte Ebene in zwei congruente Theile.

Ist ab (Fig. 18) ein Durchmesser, der ohne Ende verlängert die unendliche Ebene in zwei gleichfalls unendliche Theile trennt, die wir mit I und II bezeichnen, und rotirt man einen Punct m in I um den Durchmesser ab, bis er im Theil II eingetroffen, so wird der ganze Ebenentheil I mit jenem II zusammenfallen und demnach auch jeder Kreispunct aus I in II liegen. Nun ist aber jeder Punct p ausserhalb des von dem Bogentheil axb begrenzten Flächenstücks weiter, jeder Punct q innerhalb desselben minder weit von c entfernt, als die Puncte des Bogens, mithin kann bei dem neuen Ort, den der Bogentheil ayb in II eingenommen, kein Punct desselben ausserhalb axb, und ebenso auch kein Punct des Bogentheils axb ausserhalb ayb liegen; mithin decken sich beide Bogen, aber auch die Durchmesser, also die ganzen Grenzen; es sind daher die vom Durchmesser getrennten Bogen- und Flächentheile congruent.

§. 61.

Theilt die unbegrenzte Gerade cm (Fig. 19) eine Ebene in zwei Theile I und II und wird ein Punct a des einen Theils mit einem Punct b des andern durch eine gerade Linie ab verbunden, so schneidet diese die Gerade cm in einem einzigen zwischen a und b liegenden Punct p.

Man wähle in cm irgend einen Punct c, so liegt dieser entweder in der durch a und b gehenden geraden Linie oder nicht; in jenem Falle ist derselbe zugleich Durchschnittspunct beider Geraden. Im andern Falle beschreibe man aus c in der Ebene der drei Puncte a, b und c mit einem den Abstand jedes Punctes der begrenzten Geraden ab vom Punct c

Digitized by Google

übersteigenden Halbmesser einen Kreis, so liegen sämmtliche Puncte der begrenzten ab in der Kreisfläche und es kann ein Punct, der sich aus b längs der Geraden ba nach a bewegt, nicht ohne Durchgang durch den in die unbegrenzte cm fallenden Durchmesser aus dem einen Halbkreis in den andern gelangen, auch kann der Uebergang in mehr nicht als einem Punct erfolgen, da sonst die Gerade ab mit jener cm gegen die Voraussetzung zusammenfiele.

§. 62.

Zwei gerade Linien, die nur einen gemeinschaftlichen Punct haben, schneiden sich in diesem Punct.

Haben ab und gm (Fig. 18) den Punct c gemein, so construire man aus c mit beliebigem Halbmesser in der Ebene beider Geraden einen Kreis agb. Alsdann theilt jede dieser geraden gehörig verlängert den Kreis in zwei congruente Theile. Dieses ist aber nur möglich, wenn die durch c getrennten Theile der einen geraden in verschiedenen von der andern gemeinschaftlich begrenzten Ebenenstücken liegen.

§. 63.

Leicht erweislich sind folgende Sätze:

1. Die Gerade, welche einen Punct eines Winkelschenkels mit einem Punct des andern Schenkels verbindet, liegt ganz in dem von den Schenkeln eingeschlossenen Ebenensector.

2. Die aus dem Scheitel eines Winkels durch einen Punct im Innern des von ihm begrenzten Ebenensectors gelegte Gerade befindet sich gänzlich in diesem Sector, und die über den Scheitel gehende Verlängerung im Scheitelsector.

3. Die aus einem Punct der einen Dreiecksseite nach einem Punct einer andern gezogene gerade Linie liegt gänzlich in der Dreiecksebene.

4. Die gerade, welche einen inneren Punct einer Dreiecksseite mit einem Punct der Verlängerung einer zweiten Seite verbindet, schneidet die dritte Seite zwischen ihren Grenzen, sofern jene Verlängerung nicht über den Vereinigungspunct der zwei ersten Seiten statt hat.

Digitized by Google

§. 64.

Aus jedem Punct ausserhalb einer unbegrenzten geraden Linie ist auf dieselbe mindestens ein Senkel, d. h. eine Linie, die mit ihr gleiche Nebenwinkel bildet, möglich.

Ist a (Fig. 22) ein Punct ausserhalb der unbegrenzten Geraden gb, so wähle man zwei beliebige Puncte h und m in gleichem Abstand von a, halbire hm in c, ziehe ac, so sind wegen Congruenz der Dreiecke ahc und amc die Nebenwinkel einander gleich.

§. 65.

Aus jedem Punct ausserhalb einer unbegrenzten geraden Linie giebt es auf dieselbe nur ein einziges Senkel. Dasselbe ist zugleich die kürzeste Linie aus jenem Punct nach der Geraden, der Grundlinie.

Zur nemlichen Seite des Fusspuncts des Senkels besitzt die Grundlinie keine zwei Puncte in gleichem Abstand von irgend einem Punct des Senkels; die aus irgend einem Punct des Senkels nach der Grundlinie gezogenen Geraden wachsen mit den Abständen der Einschnittspuncte vom Fusspunct; jedes Paar Puncte der Grundlinie in gleichem Abstand vom Fusspunct, also zu beiden Seiten desselben liegend, hat endlich von jedem Punct des Senkels gleichen Abstand; endlich giebt es keinen Punct, der von mehr als zwei Puncten einer Geraden gleiche Entfernung besitzt.

Man errichte (Fig. 22) aus a ein Senkel auf die gerade gb, ziehe ferner auf derselben Seite des Senkels aus diesem Punct nach der Grundlinie die Geraden ah und ag, mache $cm = ch$, ziehe ferner am, verlängere ac, mache $cl = ac$, ziehe hl und gl und denke sich durch gb und al eine Ebene gelegt, so hat jede dieser Linien mit der Ebene zwei Puncte gemein, es fällt also jede gänzlich in die letztere. Nun liegt gc im Innern des Dreiecks agl, also auch der Punct h, mithin auch ah und es muss daher die Verlängerung ah die gl in einem Punct k zwischen g und l schneiden.

Der Construction zufolge ist der Winkel $x = y$, und nach (§. 58) auch $x = z$, daher sind die Dreiecke ahc

Digitized by Google

und lhc, desgleichen jene agc und lgc, endlich ach und acm congruent, mithin $ah = lh$, $ag = gl$ und $ah = am$. Nun ist $ah + hl > al$, daher auch $ah > \left(\frac{al}{2} = ac\right)$; ferner ist $ag + gk > ka$, daher auch $ag + gl > ak + kl > ah + hk + kl$ um so mehr $> ah + hl$, da $hk + kl > hl$; folglich ist auch $ag > ah$.

Man mache ferner $hn = hc$, so haben die Dreiecke ahn und ahc zwei Seiten einzeln gleich, nicht aber die dritte, da nach dem Erwiesenen $an > ac$. Alsdann aber sind die den dritten Seiten gegenüberliegenden Winkel ahn und ahc von einander verschieden, mithin ah kein Senkel.

Folgerung.

Aus dem Erwiesenen geht hervor, dass der Kreis von keiner geraden Linie in mehr als zwei Puncten geschnitten und durch drei in gerader Linie liegende Puncte kein Kreis construirt werden kann.

§. 66.

Jede kleinste gerade Linie zwischen einer Ebene und einem ausserhalb derselben befindlichen Punct bildet gleiche Nebenwinkel mit allen durch den Fusspunct in der Ebene gezogenen Geraden, sie steht senkrecht auf jeder dieser Geraden oder senkrecht auf der ganzen Ebene.

Besitzt (Fig. 13) kein Punct der Ebene von g eine geringere Entfernung als der Punct c, so ist die gerade cg senkrecht auf jeder durch c in der Ebene gezogenen geraden Linie. Denn wäre cg kein Senkel auf al, so sey ag das Senkel, alsdann wäre $gc > ga$, was der Voraussetzung widerstreitet.

Mithin ist gc ein Senkel auf die Ebene.

§. 67.

Aus jedem Punct ausserhalb einer Ebene giebt es auf dieselbe nur ein Senkel oder in kleinstem Abstand von jedem ausserhalb der Ebene befindlichen Punct giebt es in der Ebene nicht mehr als einen Punct.

Eine Folge des Satzes, dass aus einem Punct ausserhalb einer Geraden auf dieselbe nur eine einzige senkrechte existirt.

Digitized by Google

§. 68.

Der Ort der gemeinschaftlichen Puncte einer Ebene und Kugelfläche heisst Berührungsort, wenn kein Punct der Ebene im Innern der Kugel liegt. Die die Kugel berührende Ebene heisst Tangentialebene.

§. 69.

Die Ebene durchschneidet die Kugel, wenn das aus dem Centrum auf die Ebene gefällte Perpendikel die Grösse ihres Halbmessers nicht erreicht; sie berührt die Kugel, im Falle das Senkel dem Halbmesser gleich ist, und zwar in einem einzigen Punct, dem Fusspunct des Perpendikels; sie hat endlich mit der Kugel keinen einzigen Punct gemein, wenn das Perpendikel den Halbmesser an Grösse übertrifft.

Denn ist das Perpendikel kleiner als der Halbmesser, so liegt der Fusspunct im Innern der Kugel, und da die Ebene Puncte hat, deren Abstände vom Centrum jede beliebige Grösse erreichen, so liegen auch Puncte dieser Ebene ausserhalb der Kugel. Beide müssen sich daher und zwar in mindestens einer einzigen in sich zurückkehrenden kugelischen Linie durchdringen.

Ist ferner das Perpendikel aus dem Centrum auf die Ebene gleich dem Halbmesser, so ist der Fusspunct desselben gemeinschaftlicher Punct der Ebene und der Kugel. Nun giebt es aus einem Punct ausserhalb einer Ebene auf dieselbe nur ein einziges Perpendikel, nur eine einzige Linie von kleinster Länge; es ist also jeder andere Punct der Ebene in grösserm Abstand vom Centrum als der Fusspunct des Senkels, mithin liegen alle übrigen Puncte der Ebene ausserhalb der Kugel. Kugel und Ebene berühren sich also nur in einem einzigen Punct und es steht die Tangentialebene eines Kugelpuncts senkrecht auf dem aus dem Centrum nach diesem Punct gezogenen Halbmesser.

Ist endlich das Senkel grösser als der Halbmesser, so liegt auch der nächste Punct der Ebene, nemlich der Fusspunct des Senkels ausserhalb der Kugel, mithin haben in

Digitized by Google

in diesem Falle Kugelfläche und Ebene keinen einzigen Punct mit ninander gemein.

§. 70.

Zwei und mehr in einem und demselben Punct sich berührende Kugeln besitzen in diesem Punct eine gemeinschaftliche Tangentialebene.

Denn der Berührungspunct der Kugeln liegt mit den Centren in einer einzigen geraden Linie; es steht daher die in diesem Punct auf die Centrilinie errichtete senkrechte Ebene senkrecht auf den aus den Centren an diesen Punct gezogenen Halbmessern, ist also gemeinschaftliche Tangentialebene der Kugeln in dem Berührungspunct derselben.

Zusatz. Wir werden in der Folge sehen, dass es Fälle giebt, wo drei und mehr Kugeln einen einzigen Punct gemein haben können, ohne dass der Punct Berührungspunct ist, indem die an diesen Punct gezogenen Tangentialebenen für die drei Kugeln nicht immer zusammenfallen.

Nur also dann, wenn Kugeln in dem gemeinschaftlichen Punct eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben, sind dieselben Berührungskugeln.

§. 71.

Denkt man sich ein Senkel auf die Ebene und in demselben ein paar correspondirende Richtpuncte, ferner aus dem Fusspunct des Senkels in der Ebene zwei Kreise von verschiedenen Halbmessern, so entspricht dem grössern Halbmesser auch der grössere, dem kleinern Halbmesser der kleinere Abstand der Richtpuncte vom Umfang.

Eine Folge des im §. 65 Erwiesenen.

§. 72.

Der Durchschnitt der Ebene und Kugel erfolgt in einem einzigen Kreis.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden; entweder geht die Ebene durch das Centrum der Kugel oder nicht.

Erster Fall: Geht die Ebene durch das Centrum, so liegen alle aus demselben nach dem Durchschnitt gezogenen geraden Linien in der Ebene selbst, und da alle Puncte des Durch-

Digitized by Google

schnitts als Kugelpuncte vom Centrum gleich weit abstehen, so ist diese Durchschnittslinie ein Kreis, dessen Halbmesser mit dem Kugelhalbmesser übereinkommt. Da ferner jeder Punct der Ebene im Innern des Kreises einen geringern, jeder Punct ausserhalb des Kreises einen grössern Abstand vom gemeinschaftlichen Centrum der Kugel und des Kreises hat als die Puncte seines Umfangs, so folgt, dass die Ebene mit der Kugel ausser den Puncten dieses eben betrachteten Durchschnitts keinen andern Punct mehr gemein hat, dass also der Durchschnitt beider nur in einem einzigen Kreise besteht.

Zweiter Fall: Geht aber die Ebene nicht durch das Centrum, so fälle man aus dem letztern auf erstere ein Senkel, dann ist, da die Ebene die Kugel der Voraussetzung zufolge schneidet, dasselbe kleiner als der Halbmesser und liegt dessen Fusspunct sonach auch im Innern der Kugel.

In der Senkelverlängerung nehme man ferner einen Punct in dem der Senkellänge gleich kommenden Abstand, welcher Punct mit dem Centrum der Kugel ein Paar correspodirende Richtpuncte der Ebene bildet, so ist jeder Punct der Ebene von dem hiernach bestimmten Punct so weit entfernt als vom Centrum der Kugel. Da nun die Durchschnittspuncte der Ebene und Kugel von dem einen Richtpunct, dem Kugelcentrum, gleich weit entfernt sind, so haben sie sämmtlich auch von dem zweiten Richtpunct gleichen Abstand oder sie sind auch zugleich Puncte einer zweiten Kugel; der Durchschnitt erscheint sonach auch als Durchschnitt zweier Kugeln oder als Kreis, der alle Puncte zu Centren hat, die in der durch beide Richtpuncte gehenden geraden Linie liegen, mithin auch den nach Obigem im Innern der Kugel befindlichen Fusspunct der Richtlinie oder des Senkels, der sein Centrum im engern Sinne ist. Nun haben aber alle Puncte der Ebene im Innern des Kreises von dem in der Ebene liegenden Centrum einen kleinern, alle Puncte der Ebene ausserhalb der Kreisfläche einen grössern Abstand als die Puncte des Kreisumfangs, ferner besitzt nach (§. 71) ebendeshalb auch

Digitized by Google

jeder Punct im Innern der Kreisfläche einen geringern, jeder Punct der Ebene ausserhalb der Kreisfläche dagegen einen grösseren Abstand vom Kugelcentrum als die Puncte des vorliegenden Durchschnittskreises; es folgt daher, dass die Ebene und die Kugel ausser den Puncten des betrachteten Durchschnits keinen Punct mehr mit einander gemein haben, dass also der Durchschnitt der Kugel und Ebene in nur einem einzigen Kreise statt hat.

§. 73.

Symmetrische Kugelbinion, symmetrische Kugelternion bedeute jedes System von zwei, beziehungsweise drei sich schneidenden Kugeln von gleichen Halbmessern.

§. 74.

Denkt man sich eine Ebene mit einem beliebigen Paar correspondirender Richtpuncte, ferner eine Folge bis ins Unendliche stetig wachsender symmetrischer Kugelbinionen, deren Centren die gegebenen Richtpuncte sind, so berührt sich das Kugelpaar, dessen Halbmesser gleich dem halben Abstand der Centren oder Richtpuncte, in einem einzigen Punct von aussen, und zwar im Fusspunct der Richtlinie; es liegt also dieser Punct in der Ebene und ist zugleich eigentliches Centrum aller derjenigen Kreise, welche die Durchschnitte sämmtlicher Kugelpaare bilden und welche alle in der Ebene liegen, da eines jeden Kreises jeder Punct von einem dieser Centren oder Richtpuncte so weit wie vom andern absteht. Zwei stetig folgende Kugelpaare bilden auch zwei stetig folgende Kreise in der Ebene, d. h. zwei Kreise, zwischen denen kein Flächenstück enthalten ist, die kein Flächenstück begrenzen. Jeder Punct der Ebene gehört einem dieser stetig auf einander folgenden Kreise an, denn jeder Punct hat von den gegebenen Richtpuncten einen Abstand, der dem Halbmesser irgend einer Kugel aus der gegebenen Reihe gleich kommt.

Die Ebene ist mithin der Ort der Durchschnitte stetig wachsender symmetrischer Kugelbinionen von unveränderlichen Centren.

Digitized by Google

§. 75.

Die durch das Centrum einer Kugel sich erstreckende Ebene theilt Kugelfläche und Kugelkörper in zwei congruente Theile.

Die unendliche Ebene trennt den unendlichen körperlichen Raum in zwei gleichfalls unendliche Hälften. Erstreckt sich dieselbe nun durch ein Kugelcentrum, so trennt sie die Kugel in zwei Theile, deren jeder in einer andern Körperhälfte liegt. Es lässt sich nun das ganze System der Ebene mit einem dieser Kugeltheile durch Rotation um das Kugelcentrum dergestalt im Raum versetzen, dass beide Kugeltheile zur nemlichen Seite der Ebene liegen. Alsdann aber liegt wechselsweise kein Punct des einen Flächentheils ausserhalb des andern. Beide Flächentheile, daher auch die von ihnen eingeschlossenen Körpertheile sind mithin congruent.

§. 76.

Haben zwei Ebenen eine gerade Linie, ausserdem aber keinen Punct mit einander gemein, so ist diese Linie Durchschnittslinie.

Man construire aus irgend einem Punct der gemeinschaftlichen Geraden mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel, so wird diese durch jede der beiden Ebenen halbirt. Diess ist aber nur alsdann möglich, wenn wechselsweise die durch die gegebene Gerade begrenzten Theile der einen Ebene zu verschiedenen Seiten der andern liegen.

§. 77.

Die gerade Linie, welche mit einer Ebene nur einen Punct gemein hat, durchdringt dieselbe in diesem Punct.

Ist c (Fig. 13) der gemeinschaftliche Punct, g ein Punct der Geraden ausserhalb der Ebene, und denkt man sich durch g, c und irgend einen andern Punct a der Ebene, der, da er kein Punct der geraden $g\,c$ ist, mit den beiden ersten Puncten eine krumme Ternion bildet, eine Ebene $g\,c\,a$, so werden sich beide Ebenen, da sie zwei Puncte a und c, nicht aber alle Puncte mit einander gemein haben, in der durch diese Puncte ziehenden geraden Linie $l\,c\,a$ schneiden.

Digitized by Google

Nun schneiden sich aber auch zwei gerade Linien, die mehr nicht als einen Punct mit einander gemein haben; es liegen nemlich die durch c begrenzten Theile cg und ch der geraden in verschiedenen durch die gerade lca begrenzten Ebenenhälften, letztere aber in verschiedenen durch die gegebene Ebene begrenzten Körperhälften, mithin befinden sich auch die Linienstücke hg und cg zu verschiedenen Seiten der gegebenen Ebene, und es durchdringt daher die gerade eine Ebene, mit der sie nur einen Punct gemein hat.

§. 78.

Eine gerade Linie, deren ein Punct diesseits, ein anderer jenseits einer gegebenen Ebene liegt, durchdringt dieselbe in irgend einem Punct.

Ist g (Fig. 13) einerseits und h andererseits der Ebene, und wählt man beliebig einen Punct a in derselben, so liegt dieser entweder mit g und h in derselben geraden Linie und ist demzufolge gemeinschaftlicher Punct der geraden Linie und Ebene, also Durchschnittspunct; oder es bildet a mit g und h eine krumme Ternion. Für diesen Fall construire man aus a mit einem Halbmesser gleich oder grösser als der grösste der beiden Abstände ga und ha eine Kugel, so theilt die Ebene dieselbe in zwei Theile und es liegen alle Puncte der Begrenzten gh im Innern der Kugel, da ihr Abstand von a kleiner als ha, wenn ha der grössere der beiden Abstände ist. Da nun g und h in verschiedenen durch die Ebene gemeinschaftlich begrenzten Kugelhälften liegen, so muss die gerade gh die Kreisebene in einem zwischen g und h befindlichen Punct durchdringen.

§. 79.

Erstreckt sich eine Ebene durch zwei gegebene Puncte, eine andere nur durch einen derselben, so schneiden sich beide Ebenen in einer durch den gemeinschaftlichen Punct ziehenden geraden Linie.

Sind c und b (Fig. 13) die gegebenen Puncte, und x und y die beiden Ebenen, deren erste durch beide, die andere aber nur durch einen dieser Puncte c sich erstreckt, und zieht man

Digitized by Google

aus einem andern Punct g der Ebene y eine gerade durch c; so liegen gc und die über c gehende Verlängerung der der Ebene y angehörigen geraden gch auf verschiedenen Seiten der Ebene x.

Nun ziehe man aus irgend einem andern, nicht zur geraden gh gehörigen Punct r der Ebene y nach dem auf der entgegengesetzten Seite der Ebene x liegenden Punct g eine gerade Linie, so liegt diese in der Ebene y und durchdringt die Ebene x in einem von c verschiedenen Punct a. Nun sind a und c als Durchschnittspuncte zweier in der Ebene y liegender gerader Linien mit der Ebene x gemeinschaftliche Puncte beider Ebenen, mithin ist auch die durch dieselben gelegte gerade beiden Ebenen gemeinschaftlich; und es durchschneiden sich sonach beide Ebenen in dieser geraden.

§. 80.

In jedem Punct einer Ebene ist auf dieselbe nur ein einziges Senkel möglich.

Ist gc (Fig. 13) ein Senkel auf der Ebene x, so ziehe man durch c irgend eine andere gerade Linie cs ausserhalb der Ebene, lege durch gc und sc eine Ebene y, alsdann schneidet diese die Ebene x, mit der sie den Punct c gemein hat, in einer durch c gehenden geraden Linie ca. Nun ist gc senkrecht auf ca. Auf eine gerade ist aber in jedem Punct c nur ein einziges Senkel in derselben Ebene möglich. Mithin ist cs, da sie mit gc und ca in derselben Ebene liegt, kein Senkel auf ca, mithin auch kein Senkel auf die Ebene x.

§. 81.

Der Kreis, dessen ein Punct oberhalb, ein anderer unterhalb einer unbegrenzten Ebene liegt, durchdringt dieselbe in mindestens zwei Puncten.

Ist x die Ebene, m ein Kreispunct oberhalb, n ein solcher unterhalb x, so schneidet die Gerade mn die Ebene in irgend einem Punct p. Nun construire man aus dem Punct p mit einem Halbmesser, der den Abstand aller Puncte des Kreisumfangs vom Punct p übersteigt, eine Kugel, so liegen alle Puncte des Kreises im Innern derselben. Die gegebene,

Digitized by Google

durch das Centrum der Kugel ziehende Ebene theilt dieselbe in zwei Hälften, in deren einer der Punct *m*, in deren zweiter der Punct *n* liegt. Nun kann ein Punct, der sich aus *n*, längs dem Kreise nach *m* bewegt, der Construction zufolge das Innere der Kugel nicht verlassen, er kann daher nicht ohne Durchdringen der die Kugel halbirenden ebenen Kreisfläche von einer Seite zur andern gelangen und in *n* angelangt nicht ohne abermaligen Durchgang durch die Ebene in einem andern Punct in Vollendung des Kreislaufes nach *m* zurückkehren.

§. 82.

Der Durchschnitt eines Kreises mit einer Ebene erfolgt in zwei Puncten.

Der Kreis ist eine ebene Linie, keine Ternion von Puncten eines Kreises liegt in gerader Linie, durch drei in krummer Ternion liegende Puncte giebt es nur eine einzige Ebene; liegen also drei Puncte eines Kreises in einer Ebene, so fallen alle Puncte desselben in die Ebene. Durchschneiden sich daher Kreis und Ebene, so kann diess in mehr nicht als zwei Puncten statthaben, nach dem vorhergehenden Paragraphen aber auch nicht in weniger als zwei Puncten, deshalb erfolgt Durchschnitt in zwei Puncten.

§. 83.

Liegen zwei Centren eines Kreises in einer Ebene A, so schneiden sich Kreis und Ebene in zwei Puncten.

Da der Kreis in seiner eigenen Ebene B nur ein einziges Centrum hat, so folgt, dass wenn mehrere Centren eines und desselben Kreises in einer gegebenen Ebene liegen, seine eigene Ebene von letzterer verschieden ist. Liegen aber zwei Centren des Kreises in der Ebene A, so liegt die durch beide ziehende Centrilinie darin, daher auch das eigentliche Centrum. Dieses aber ist gemeinschaftlicher Punct beider Ebenen, daher schneiden sich dieselben in einer durch dasselbe gehenden geraden Linie (§. 79). Diese ausgenommen durchdringen (§. 77) sämmtliche in der Kreisebene durch das eigentliche Centrum gezogene Durchmesser die gegebene Ebene, es liegen daher Puncte des Kreises zu beiden Seiten

Digitized by Google

dieser Ebene, es schneiden sich mithin Kreis und Ebene und zwar nach dem vorigen Paragraphen in zwei Puncten.

§. 84.

Die Durchschnittspuncte des Kreises mit jeder durch seine Centrilinie gehenden Ebene liegen zu beiden Seiten dieser Linie.

Die Ebene des Kreises schneidet die gegebene Ebene in einer durch das eigentliche Kreiscentrum ziehenden geraden Linie; in dieser befinden sich beiderseits vom Centrum die Durchschnittspuncte des Kreises und der Ebene. Da nun die durch das Centrum getrennten Theile dieser Linie in verschiedenen von der Centrilinie gemeinschaftlich begrenzten Ebenentheilen liegen, so ist diess auch mit jenen Durchschnittspuncten der Fall.

§. 85.

Ueber derselben geraden Grundlinie lässt sich mit noch zwei andern geraden Linien, deren Summe grösser und deren Unterschied kleiner als die Grundlinie, in derselben Ebene auf jeder Seite der Grundlinie bei gleichbleibender Verbindung nur ein einziges Dreieck construiren.

Ist ac (Fig. 25) die Grundlinie und sind ab und bc die beiden andern Seiten, so denke man sich a und c als Centren eines Kreises, deren Halbmesser ab und bc sind. Nun liegen die Spitzen aller über derselben Grundlinie ac mit denselben Seiten ac und bc in derselben Verbindung construirbaren Dreiecke in dem gedachten Kreis; dieser aber schneidet die gegebene, durch die Grundlinie gelegte Ebene beiderseits der Grundlinie in nur einem einzigen Punct; mithin ist aus den gegebenen Stücken in der gegebenen Ebene über derselben Grundlinie bei gleicher Verbindung auf jeder Seite der Grundlinie nur ein einziges Dreieck möglich.

Hieraus folgt:

1. dass zwei in derselben Ebene liegende Kreise sich nur in zwei zu beiden Seiten der ihre Centren verbindenden geraden Linie liegenden Puncten schneiden und dass daher wenn zwei in derselben Ebene befindliche Kreise mehr als

Digitized by Google

zwei Puncte gemein haben, dieselben congruent sind, dass also durch drei Puncte, wenn anders ein Kreis durch dieselben construirt werden kann, nur ein einziger möglich ist;

2. dass wenn über derselben Grundlinie ac aus demselben Punct a zur nemlichen Seite eine zweite Linie $ab_1 = ab$ in derselben Ebene gezogen wird, die Abstände b_1c und bc von einander verschieden; und hieraus

3. dass auch die Winkel bac und b_1ac ungleich sind, während wegen Congruenz der Dreiecke der auf der andern Seite von ac befindliche Winkel gac jenem bac gleich ist.

4. dass bei demselben Kreise gleichen Bogen gleiche Sehnen und verschiedenen Bogen verschiedene Sehnen und zwar dem grössern Bogen die grössere Sehne gegenübersteht, weil nemlich dem grössten Bogen (dem Halbkreis), die grösste Sehne, der Durchmesser, entspricht, wobei von den zwei sich zum Umkreis ergänzenden eine gemeinschaftliche Sehne besitzenden Bogen der kleinere zu verstehen ist.

Man hat daher (nach Ziff. 3) den folgenden für die Theorie des Winkels höchst wichtigen, ihre Grundlage bildenden Satz:

§. 86.

Werden aus einem Punct einer geraden Linie in einer durch dieselbe gelegten Ebene zur nemlichen Seite der Linie verschiedene gerade Linien gezogen, so bilden diese mit jedem aus jenem Punct oder Scheitel ausgehenden Theil jener Geraden eben so viele von einander verschiedene Winkel.

§. 87.

Ein Kreis hat ausserhalb seiner Centrilinie kein Centrum.

Es sey (Fig. 6) π der Kreis, cq die Centrilinie und p irgend ein Punct ausserhalb der letzteren und der Kreisebene; man lege durch diesen Punct und die Centrilinie eine Ebene, so schneidet diese die Kreisebene in einer durch das eigentliche Centrum c gehenden geraden Linie ab.

Nun liegt der Punct p in der durch ab und qc gehenden Ebene; es ist ferner qc ein Senkel auf ab, jeder Punct dieser Ebene, der von den Kreispuncten a und b gleich weit entfernt ist, liegt ferner in diesem Senkel, daher hat der

Digitized by Google

Punct p, welcher der Voraussetzung nach dem Senkel nicht angehört, von den Puncten a und b ungleiche Abstände und ist mithin kein Centrum des Kreises. Nun giebt es aber auch in der Kreisebene selbst ausser dem Fusspunct der Centrilinie kein anderes Centrum, mithin hat ein Kreis kein Centrum ausserhalb seiner Centrilinie.

§. 88.

Ist eine Ebene gegeben und wählt man darin beliebige zwei Puncte, so ist der Ort aller Puncte dieser Ebene, deren jeder von einem der gegebenen zwei Puncte so weit absteht wie vom andern eine gerade Linie; es bildet nemlich die stetige Folge aller dieser Puncte das Senkel, welches in der Ebene auf die Mitte der von dem gegebenen Punctenpaar begrenzten geraden Linie errichtet wird.

Man kann daher die gerade Linie definiren als eine in einer Ebene liegende Linie, deren jeder Punct von einem unter zwei Puncten der Ebene so weit entfernt ist wie vom andern.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Winkeltheorie.

§. 89.

Die bisherige Betrachtung der Winkel beschränkte sich nur auf das Aufsuchen der Bedingungen der Gleichheit oder Ungleichheit derselben. Eine Vergleichung verschiedener Winkel rücksichtlich einer ihnen zukommenden Grösse fand bis jetzt nicht statt und war auch ganz entbehrlich. Allein nicht immer genügt die blose Kenntniss der Gleichheit oder Verschiedenheit gegebener Winkel.

Obgleich die Winkel keine neue Gattung von Raumgrössen bilden, deren es nur dreierlei, nemlich den Körper-, Flächen- und Linienraum giebt, zu welch letzterm der Winkel als Linie gehört, so werden dieselben dennoch als Grössen eigener Art behandelt, wobei aber ihre linearische Ausdehnung ganz ausser Acht bleibt. Mit dem Winkel können nemlich Raumgrössen, als Linien, Flächen und Körper in Verbindung gebracht werden, deren Ausdehnung mit dem Winkel selbst variirt.

Denken wir uns eine Anzahl sämmtlich von einander verschiedener Winkel und setzen bei allen die Schenkel von gleicher Länge voraus, so sind auch die die Schenkelenden verbindenden geraden Linien oder Sehnen sämmtlich von einander verschieden. Einem jeden Winkel entspricht also für eine gegebene Schenkellänge eine bestimmte Sehne. Winkel und Sehnenlänge bestimmen einander gegenseitig und während der Winkel selbst keine neue Gattung von Grösse ist, so kann er als solche behandelt werden, indem man verschiedenen Winkeln das Verhältniss der entsprechenden

Digitized by Google

Sehnenlängen beilegt, die Sehnen also als Winkelmaas gebraucht.

Unter der Voraussetzung gleicher Schenkellängen entsprechen verschiedenen Winkeln aber auch verschiedene Längen der aus den Scheiteln mit den Schenkeln zwischen deren Enden beschriebenen Kreisbogen; es lassen sich daher auch diese als Winkelmaas betrachten und verschiedenen Winkeln das Verhältniss der entsprechenden Kreisbogen beilegen. Aehnlich liessen sich die von den Schenkeln und Bogen begrenzten Kreissectoren, ferner die Kugelsectoren und jede andere mit dem Winkel variirende Grösse als Winkelmaas einführen.

Dieselben zwei Winkel haben aber, als Grösse behandelt, bald dieses, bald ein anderes Verhältniss zu einander, je nachdem man das eine oder andere Maas zu ihrer Messung in Anwendung bringt, indem z. B., wie aus dem folgenden erhellt, die Sehnen zweier gegebenen Winkel in einem andern Verhältniss als die ihnen entsprechenden Kreisbogen zu einander stehen. Es entsteht daher zunächst die Frage, welches Maas verdient den Vorzug vor den übrigen?

§. 90.

Liegen (Fig. 27) die aus demselben Puncte c ausgehenden Geraden ck, ch und ca in derselben Ebene und erstere beide auf derselben Seite der letztern, so sind die Winkel kca und hca nach §. 86 von einander verschieden.

Man ziehe nun aus c in der Ebene dieser drei Linien einen Kreis, ferner die Sehnen kh, ha und ka und untersuche das Verhalten der drei Winkel x, y und z, welche je zwei der aus c ausgehenden drei Geraden mit einander bilden.

Misst man die Winkel durch Sehnen, so hat man die Proportion:

$$\text{Winkel } (x : y : z) = \text{Sehne } (kh : ha : ka)$$

und hieraus

$$\text{Winkel } (x+y) : \text{Winkel } z = \text{Sehne } (kh+ha) : \text{Sehne } ka,$$
$$\text{Winkel } (z-x) : \text{Winkel } y = \text{Sehne } (ka-kh) : \text{Sehne } ha.$$

Nun liegen keine drei Puncte eines Kreisbogens in gerader

Digitized by Google

Linie, es ist also auch h kein Punct der Sehne ka und demzufolge ist die Sehnensumme $(kh+ha) >$ Sehne ka und der Sehnenunterschied $.....(ka-kh) <$ Sehne ha.... Daher ist auch

die Winkelsumme $(x+y) >$ Winkel z und der
Winkelunterschied $(z-x) <$ Winkel y.

Nimmt man aber die Bogen zum Winkelmaas, so ergeben sich die Proportionen:

Winkel $(x+y)$: Winkel z = Bogen $(kh+ha)$: Bogen ka.
Winkel $(z-x)$: Winkel y = Bogen $(ka-kh)$: Bogen ha.

Nun ist aber die

Bogensumme .... $(kh+ha)$ = dem Bogen ka und der
Bogenunterschied $(ka-kh)$ = dem Bogen ha,

mithin ist auch die

Winkelsumme .... $(x+y)$ = dem Winkel z und der
Winkelunterschied $(z-x)$ = dem Winkel y.

Während also bei Einführung des Sehnenmaases die durch den Scheitel c in der Ebene des Winkels kca zwischen dessen Schenkeln hindurch gehende gerade Linie mit den letzteren zwei neue Winkel bildet, deren Summe grösser als der gegebene Winkel; so ist diese Summe bei Einführung des Bogenmaases dem gegebenen Winkel gleich, es theilt also beim Bogenmaas diese dritte Linie den Winkel in seine Theile, was bei Anwendung des Sehnenmaases nicht der Fall ist; ein Umstand, der dem Bogenmaas, sowie jedem andern dieselben Erscheinungen darbietenden Maas einen entschiedenen Vorzug vor dem Sehnenmaas verschafft.

§. 91.

Werden aus einem Punct drei gerade Linien gezogen, deren keine in der durch die beiden andern bestimmten Ebene liegt, so ist für Bogenmaas die Summe der Winkel, welche jede dieser Linien mit den beiden andern bildet, grösser und der Unterschied derselben kleiner als der Winkel der beiden andern Linien.

Sind die einzelnen Winkel einander gleich, so ist die Behauptung eine unmittelbare Folge der Annahme. Sind aber

Digitized by Google

die einzelnen Winkel nicht alle einander gleich, so sey (Fig. 28) z. B. der Winkel $acb >$ Winkel acg, alsdann verbinde man einen beliebigen Punct a der ac mit einem beliebigen Punct b der bc durch die gerade ab, ziehe ch der Art, dass der Winkel $ach =$ Winkel acg; ferner mache man $cg = ch$ und ziehe ga und gb; so sind die Dreiecke acg und ach wegen Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels congruent, mithin $ah = ag$. Nun ist $ag + gb > ab$, da g nicht in der Ebene acb, also auch nicht in der Geraden ab liegt; folglich auch $gb > hb$ und demgemäss, da in den Dreiecken gcb und hcb die andern Seiten einzeln einander gleich sind, auch der Winkel $gcb >$ Winkel hcb, daher auch Winkel $(gca + gcb) >$ Winkel $(ach + hcb)$ oder $>$ Winkel acb.

Auf ähnliche Art findet man auch

Winkel $(bcg + bca) >$ Winkel gca und

Winkel $(acg + acb) >$ Winkel gcb.

Es ist also die Summe je zweier dieser Winkel grösser als der dritte.

Zugleich aber ist der Unterschied je zweier kleiner als der dritte, da derselbe weder gleich noch grösser als der dritte Winkel sein kann.

Denn wäre z. B.

der Winkel $(gcb - gca) =$ dem Winkel acb,

so wäre auch

der Winkel $gcb =$ dem Winkel $(acb + gca)$

und es lägen sofort die drei Linien in derselben Ebene, was gegen die Voraussetzung.

Wäre ferner

der Winkel $(gcb - gca) >$ Winkel acb,

so wäre der Winkel $gcb >$ Winkel $(acb + gca)$,

was dem oben Erwiesenen,

wonach der Winkel $gcb <$ Winkel $(acb + gca)$ ist, widerstreitet.

Es ist mithin der Unterschied je zweier dieser Winkel kleiner als der dritte.

Digitized by Google

§. 92.

Drei durch denselben Punct gehende gerade Linien liegen entweder in ein und derselben Ebene oder nicht. Da im erstern Falle die eine Linie mit den beiden andern entweder eine Winkelsumme oder einen Winkelunterschied bildet gleich dem Winkel der andern Linien; im zweiten Falle dagegen die Winkelsumme, welche jede Linie mit den beiden andern bildet, grösser, der Winkelunterschied aber zugleich kleiner ist, als der Winkel der beiden andern; so folgt, dass eine Linie mit zwei andern nie eine Winkelsumme bilden kann, die kleiner und einen Winkelunterschied, der grösser ist als der Winkel der letztern; dass also bei einer aus demselben Punct ausgehenden, in derselben Ebene liegenden Linienternion entweder die Summe der Winkel, welche die eine Linie mit den beiden andern bildet, ein Minimum, oder der Unterschied derselben ein Maximum ist.

§. 93.

Sind x und y (Fig. 29) zwei concentrische Kreise in derselben Ebene und zieht man aus dem Centrum c in der Ebene der Kreise die geraden cq, cn, ch, so theilt die mittlere die zwischen den beiden äussern liegenden Bogenstücke dieser Kreise in gleichem Verhältniss oder es ist

$$bm : mp = hn : nq.$$

Hier sind zwei Fälle besonders zu betrachten; es kann nemlich die cm den Bogen bp in zwei entweder commensurable oder incommensurable Theile zerlegen.

Erster Fall; Sind bm und pm commensurabel, so zerlege man den ganzen Bogen bp in unter sich gleiche Theile der Art, dass ein Theilpunct in m fällt. Zieht man nun aus c durch sämmtliche Theilpuncte gerade Linien, so bilden diese eine Reihe unter sich gleicher Winkel und es müssen daher auch die im concentrischen Bogen hq in derselben Zahl entstandenen Theilbogen einander gleich seyn.

Man hat daher, wenn α und β die Anzahl der Bogentheile von bm und hn, beziehungsweise mp und nq, und

Digitized by Google

t, T die Längen der entstandenen Theilbogen in beiden concentrischen Kreisen bezeichnen, die Proportion:

$$bm : mp = \alpha \times t : \beta \times t = \alpha : \beta,$$
$$hn : nq = \alpha \times T : \beta \times T = \alpha : \beta,$$

daher auch

$$bm : mp = hn : nq.$$

Zweiter Fall: Sind bm und mp dagegen nicht commensurabel, d. h. lässt sich, in wie viele gleiche Theile auch bm zerlegt werden mag, kein Theil angeben, der ohne Rest in mp aufgeht, so wird, wenn man wieder aus c durch die Theilpuncte gerade Linien zieht, wie klein auch die Theile genommen werden, der Punct p beständig zwischen zwei nächstfolgenden Theilpuncten r und t, und der Punct q beständig zwischen zwei unmittelbar folgenden Theilpuncten s und u liegen.

Es sind daher die beiden Verhältnisse $bm : mp$ und $hn : nq$ jederzeit zwischen den Grenzen

$$\left(\frac{bm}{mr} = \frac{hn}{ns}\right) \text{ und } \left(\frac{bm}{mt} = \frac{hn}{nu}\right)$$

enthalten. Nun lassen sich aber diese Grenzen einander so nahe bringen, dass ihr Unterschied kleiner als jede bestimmbare Grösse; und hieraus folgt, dass zwischen den Verhältnissen $bm : mp$ und $hn : nq$ kein Unterschied bestehen kann, dass also auch für den Fall der Incommensurabilität von bm und mp die Proportion

$$bm : mp = hn : nq$$

statt hat.

Welchen Halbmesser man daher auch bei Anwendung des Bogenmaases zum Grund legen mag, so bleibt das Verhältniss der Bogen zweier gegebenen Winkel constant, daher auch das Verhältniss der Bogen, wenn diese selbst wieder durch gleiche Grössen, z. B. den zugehörigen Umkreis π gemessen werden.

Theilt man den Umkreis in eine Anzahl unter sich gleicher Theile, so verhalten sich zwei gegebene Winkel auch wie

Digitized by Google

die Anzahl der in den Bogen enthaltenen Theile, was zum Gradmaas führt.

Zur Ergänzung dieser Theorie ist noch anzuführen, dass wie leicht zu finden, die Summe zweier Nebenwinkel gleich zwei rechten Winkeln oder 180^0, wenn der Umfang des Kreises in 360 gleiche Theile oder Grade zerlegt wird; ferner dass die Scheitelwinkel, deren Gleichheit im §. 58 nur für einen besondern Fall erwiesen wurde, immer einander gleich sind.

Das hier betrachtete Bogen- und Gradmaas erweist sich zur Messung der Krümmungen nicht brauchbar; für diese ist daher die Einführung eines andern Maases erforderlich; da dieselbe aber von der Voraussetzung des Durchschneidens gerader Linien unter gegebenen Umständen ausgeht, so wollen wir zuvor die Bedingungen, unter denen zwei gerade Linien sich schneiden müssen, untersuchen, nemlich zur Lösung des Parallelproblems übergehen und alsdann erst die Gründe für die Nothwendigkeit eines besondern Krümmungsmaases entwickeln und die Beschaffenheit des letztern angeben.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Parallelproblem.

§. 94.

Liegt von zwei geraden Linien die eine in einer gegebenen Ebene und wird diese von der andern geraden in einem der ersten nicht angehörigen Punct geschnitten, so giebt es keine Ebene, in denen beide gerade Linien gleichzeitig liegen.

Ist x die gegebene Ebene, ab die in ihr befindliche gerade, und cg die zweite die Ebene in c schneidende gerade, so hat der Voraussetzung nach erstlich die gegebene Ebene mit cg nur den Punct c gemein. Es kann aber auch keine andere durch ab gelegte Ebene mit cg mehr als einen Punct gemein haben. Denn wenn möglich seyen zwei Puncte p und g der geraden cg Puncte einer durch ab gehenden Ebene, alsdann fiele auch der Punct c in diese Ebene, dieselbe wäre mithin, da sie drei Puncte a, b und c in krummer Ternion mit der Ebene x gemein hätte, mit letzterer identisch und es fielen daher auch alle Puncte der geraden cg in die Ebene x, was gegen die Voraussetzung.

Es giebt also keine Ebene, welche durch die beiden geraden ab und cg zugleich geht.

§. 95.

Zwei gerade Linien, durch welche sich keine Ebene legen lässt, schneiden sich nicht, da durch jedes Paar sich schneidender Geraden eine Ebene möglich ist.

§. 96.

In jedem Dreieck ist der von einer Seite mit der Verlängerung einer andern gebildete äussere Winkel grösser als jeder der beiden innern entgegengesetzten Winkel des Drei-

Digitized by Google

ecks. Auch betragen jede zwei Winkel eines Dreiecks zusammen weniger als 180°.

Ist abc das Dreieck, cg die Verlängerung der Seite ac, so halbire man bc in h, ziehe ahm, mache $hm = ah$ und ziehe cm, so sind der Construction zufolge und wegen Gleichheit der Scheitelwinkel die Dreiecke ahb und mhc congruent, daher die correspondirenden Winkel abh und mch einander gleich. Nun ist der Winkel mch ein Theil des Winkels gcb, mithin ist der Winkel b kleiner als der Winkel bcg. Auf ähnliche Art findet man den Winkel a kleiner als den Winkel acr; aber $acr = bcg$, mithin ist jeder der beiden Winkel a und b kleiner als der äussere Winkel bcg.

Nun sind die Nebenwinkel $bca + bcg = 180°$, daher $bca + a$ oder $c + a < 180°$, ähnlich findet man $c + b < 180°$ und $a + b < 180°$.

§. 97.

Verbindet man beliebige Puncte einer unbegrenzten geraden mit beliebigen Puncten einer andern in derselben Ebene befindlichen, unbegrenzten geraden durch gerade Linienstücke, so schneiden sich erstere nicht, sobald dieselben mit nur einer einzigen dieser Verbindungslinien ein Paar innere Gegenwinkel bilden, deren Summe $= 180°$.

Denn schnitten sich jene unbegrenzten geraden Linien, auf welcher Seite es seyn möge, so entstünde ein Dreieck mit zwei Winkeln, deren Summe 180° betrüge, was nach dem vorhergehenden Paragraphen unmöglich.

§. 98.

Theilt man den Halbmesser eines Kreises (Fig. 31) beliebig in zwei Theile und ist des Theilpunctes Abstandssumme vom Centrum und einem andern Punct der Kreisebene ausserhalb des Halbmessers gleich oder kleiner als letzterer, so liegt dieser zweite Punct im Innern der Kreisfläche.

Denn ist a der Endpunct des Halbmessers und m der Theilpunct desselben, n ein Peripheriepunct und p ein Punct ausserhalb der Kreisfläche; so ist $mc + mn > cn$ und

Digitized by Google

$mc+mp>cp$; aber $cp>cn$, um so mehr $mc+mp>cn$. Ist daher des Punctes m Abstandssumme von c und einem andern Punct der Ebene des Kreises ausserhalb des Halbmessers $ca<r$, so kann dieser letztere Punct weder in der Peripherie noch ausserhalb des Kreises liegen, er muss daher im Innern der Kreisfläche enthalten seyn.

§. 99.

Schneiden sich (Fig. 32) die beiden geraden pq und ar in c unter einem Winkel acp, und zieht man in der Ebene beider Linien durch den Scheitel c zwischen den Schenkeln cp und ac eine dritte Linie cn, so ist der Winkel $acp>ncp$.

Bewegt sich nun der kleinere Winkel ncp längs seiner Ebene der Art, dass der Schenkel cp die unbegrenzte pq nicht verlässt und ist, nachdem der Scheitel c in der über ihn ziehenden Verlängerung des gemeinschaftlichen Schenkels im Punct b angelangt ist, ein Punct n des Schenkels von der einen Seite der ca zur andern übergegangen, so erfolgte dessen Durchgang durch die Linie ca, sofern ca nicht kleiner als $cb+cn$.

Denn construirt man aus c einen Kreis in der Ebene dieser Linien mit einem Halbmesser ca nicht kleiner als $cb+cn$, so ist während der Bewegung des Scheitels und Schenkels die Summe des Schenkelstückes cn und des Scheitelabstandes cb beständig kleiner als ca und erreicht erst nach dem Eintritt des Scheitels c in den Punct b die Grösse des Halbmessers ca.

In beiden Fällen aber kann der Punct n nach dem vorigen Paragraphen das Innere der Kreisfläche nicht verlassen; ist daher der Punct n von der einen Seite des Durchmessers zur andern übergegangen, so konnte dies nicht ohne Durchgang durch den Schenkel ca erfolgt seyn.

§. 100.

Leicht erweisliche Sätze sind, unter der Voraussetzung des vorigen Paragraphen

1. dass keine zwei Puncte des Schenkels cn gleichzeitig durch ca hindurchgehen,

Digitized by Google

2. dass wenn der Winkel $cbm < pca$, die mit Annäherung des Scheitels b an c verbundene Bewegung des Schenkels bm zum Durchschnitt des letztern mit ca führt, bevor noch b den Scheitel c erreicht hat,

3. dass Bewegung irgend eines Punctes des Schenkels bm nach ein oder der andern Seite von bm auch Bewegung jedes andern Punctes desselben nach derselben Seite zur Folge hat.

§. 101.

Sind (Fig. 33) ein Paar innere Gegenwinkel $x + y$ zusammen $< 180°$ und erfolgt für einen bestimmten Scheitelabstand ac Durchschnitt der beiden Linien ab und cb, so ist dieser Scheitelabstand nicht der grösste, bei welchem für die gegebenen Winkel Durchschnitt eintreten kann.

Ist b der Durchschnittspunct, so liegen alle Puncte der Verlängerung bm unterhalb cq, wenn a oberhalb lag.

Bewegt sich nun der Winkel x mit seinem Scheitel längs ct und zwar mit Vergrösserung des Scheitelabstandes, so wird auch jeder andere Punct m der Schenkelverlängerung Bewegung annehmen, und nachdem a den Abstand ct erreicht hat, auch m in einem andern Ort n eingetroffen seyn und dieser entweder unterhalb cq oder in cq oder oberhalb cq sich befinden.

In beiden ersten Fällen schneiden sich tn und cq. Im letztern Falle musste, wenn $cq \gtreqless ct + am$ gemacht war, der Punct m, bevor er oberhalb cq gelangte, nach dem vorigen Paragraphen durch cq selbst hindurchgegangen seyn, also auch hier ein Durchschnitt p beider Linien sich ergeben haben, der einem zwischen a und t, z. B. in s liegenden Ort des Scheitels entspricht. Es war also in keinem Fall ac der grösste Scheitelabstand, bei welchem die ab und cb einander sich schneiden können, und es ergeben sich daher, wenn Durchschnitt zweier Linien in gegebenen Scheitelabstand eintritt, auch Durchschnitte für grössere Scheitelabstände.

§. 102.

Zwei in derselben Ebene liegende unbegrenzte gerade Linien, welche mit einer dritten sie schneidenden ein Paar

Digitized by Google

innere Gegenwinkel zusammen $< 180°$, das andere Paar daher zusammen $> 180°$ bilden, schneiden sich bei jedem Scheitelabstand und zwar auf der Seite der kleinern Winkelsumme.

Denn sind (Fig. 34) ag und cb jene unbegrenzten geraden Linien, ac eine Verbindungslinie und ist der Winkel $gac < bch$, so müsste, so fern sich beide Linien nicht in jedem Scheitelabstand ac schnitten, bei der früher angedeuteten Winkelbewegung ein erster Durchschnitt sich ergeben, bevor noch der Scheitel a im Scheitel c eingetroffen, es müsste also zwischen a und c ein Punct n und demnach ein Scheitelabstand cn sich bestimmen lassen, in welchem beide Linien sich schneiden, bei dessen Ueberschreitung aber kein Durchschnitt erfolgt. Einen solchen Punct giebt es aber nach dem vorigen Paragraphen nicht, mithin kann die unbegrenzte ag nicht durch Bewegung zu einem ersten Durchschnitt gelangen, sie muss daher in jedem Scheitelabstand die gerade bc schneiden.

Dieser Durchschnitt muss ferner auf der Seite der kleinern Winkelsumme eintreten, indem Dreiecke unmöglich, deren zwei Winkel zusammen $180°$ übersteigen.

§. 103.

Zwei in derselben Ebene liegende unbegrenzte gerade Linien schneiden sich nicht, sobald sie mit nur einer einzigen geraden Verbindungslinie ein Paar innere Gegenwinkel $= 180°$; zwei dergleichen Linien aber schneiden sich, sobald sie mit nur einer einzigen dieser Verbindungslinien ein Paar innere Gegenwinkel einerseits $>$, andererseits $< 180°$ bilden. Hieraus folgt, dass ein und dasselbe Paar begrenzte oder unbegrenzte gerade Linien mit allen nur denkbaren geraden Verbindungslinien dergleichen Winkelsummen nur von einerlei Art bilden kann; ferner, dass wenn zwei in derselben Ebene liegende unbegrenzte gerade Linien sich nicht schneiden, die innern Gegenwinkel, die sie mit jeder dritten Linie bilden, zusammen $180°$ betragen.

Zwei in derselben Ebene liegende, sich nicht schneidende

Digitized by Google

unbegrenzte gerade Linien oder auch zwei begrenzte Linien dieser Art, die bei Aufhebung der Begrenzung sich nicht schneiden würden, heissen Parallellinien.

§. 104.

Ohne Schwierigkeit findet man nun weiter, dass die Winkelsumme eines Dreiecks = 180°,

eines Vierecks = 360°,

ferner, dass die in irgend zwei Schenkelpuncten eines Winkels in dessen Ebene auf beiden Schenkeln errichteten unbegrenzten Senkel sich irgendwo schneiden; und mit Hülfe des letztern Satzes endlich, dass durch jede drei in krummer Ternion befindliche Puncte ein Kreis gezogen werden kann.

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Kugelternionen und Rotation.

I. Kugelternionen.

§. 105.

Sind drei Puncte gemeinschaftliche Puncte dreier Kugeln, so schneiden sich diese in einem und demselben durch jene Puncte gehenden Kreis und ihre Centren liegen in einer und derselben geraden Linie. Drei Kugeln ferner, deren Centren nicht in derselben geraden Linie liegen, können höchstens zwei Puncte gemeinschaftlich besitzen.

Sollen drei Kugeln drei Puncte gemeinschaftlich besitzen, so müssen sich je zwei derselben in einem durch diese drei Puncte gehenden Kreise schneiden, da Berührung zweier Kugeln in nicht mehr als einem Puncte statt hat.

Nun ist aber durch drei nicht in gerader Linie liegende Puncte nur ein einziger Kreis möglich, mithin fallen die drei Durchschnitte je zweier dieser Kugeln sämmtlich in einen einzigen zusammen.

Da ferner kein Centrum eines Kreises ausserhalb seiner geraden Centrilinie liegt, so folgt, dass die drei Kugelcentren, da sie zugleich Centren des gemeinschaftlichen Durchschnittskreises sind, in dessen Centrilinie, also in einer geraden Linie liegen, endlich dass wenn die Centren dreier Kugeln nicht in gerader Linie sich befinden, diese Kugeln sich nicht in einem gemeinschaftlichen Kreise schneiden, sondern höchstens zwei gemeinschaftliche Puncte haben können.

§. 106.

Jedem Puncte einerseits einer durch drei Kreispuncte gehenden Ebene entspricht zur nemlichen Seite kein anderer

Digitized by Google

Punct in denselben Abständen von den gegebenen drei Puncten. Dagegen befindet sich zur andern Seite der Ebene in ganz denselben Abständen ein zweiter Punct. Daher liegt auch, sobald drei Kugeln nur zwei Puncte mit einander gemein haben und der eine derselben einerseits der durch die drei Centren gehenden Ebene liegt, der zweite gemeinschaftliche Punct auf der andern Seite dieser Ebene.

Ist m (Fig. 35) ein Punct oberhalb der durch die drei Puncte a, b, c gehenden Ebene, so errichte man das Senkel mp, mache $np = mp$, dann ist wegen Congruenz der Dreiecke $bm = bn$, $am = an$, $cm = cn$; es hat also unterhalb der Ebene der Punct n des Senkels im Abstand $np = mp$ vom Fusspunct dieselben Abstände von a, b und c, wie der oberhalb befindliche Punct m. Nun können m und n zugleich als gemeinschaftliche Puncte dreier Kugeln, deren Centren a, b, c, und deren Halbmesser die gegebenen Abstände $am = an$ etc. sind, betrachtet werden; und da drei Kugeln, deren Centren nicht in gerader Linie liegen, höchstens zwei Puncte gemein haben, so folgt, dass es keinen Punct mehr giebt ausser n, der dieselben Abstände von a, b und c hat wie der Punct m.

§. 107.

Drei Kugeln, deren Centren in einem Kreise liegen, haben, falls sie gemeinschaftliche Puncte in der Ebene der drei Centren besitzen, keinen gemeinschaftlichen Punct ausserhalb derselben.

Denn läge ein solcher Punct ausserhalb der Ebene, so entspräche ihm zur andern Seite der Ebene ein anderer Punct als gemeinschaftlicher Punct und die drei Kugeln hätten daher mehr als zwei gemeinschaftliche Puncte, was, da ihre Centren nicht in gerader Linie, unmöglich.

§. 108.

Drei Kugeln a, b, c, deren gleichnamige Centren in einem Kreise liegen, können in der Ebene der Centren nicht mehr als einen Punct gemeinschaftlich haben.

Digitized by Google

Drei Kugeln haben in der Ebene ihrer Centren nur einen Punct gemein:

1. wenn zwei derselben sich von innen oder aussen berühren und die dritte Kugel durch diesen Berührungspunct geht; denn Berührung zweier Kugeln findet in nur einem einzigen in ihrer Centrilinie liegenden Puncte statt, jene aber liegt in der Ebene der drei Centren, da zwei ihrer Puncte dieser Ebene angehören, mithin befindet sich auch dieser Berührungspunct darin.

2. Wenn zwei dieser Kugeln sich schneiden und zugleich die dritte Kugel

a. entweder die Ebene des Durchschnitts der beiden ersten Kugeln im Umfang des Durchschnittskreises berührt;

b. oder diese Ebene in einem Kreise schneidet, und beide Kreise sich sofort von innen oder aussen berühren.

Zu 2^a. Berührt die dritte Kugel c die Ebene des Kreises der Kugeln a und b, und soll dies im Umfang des Kreises ab geschehen, so muss es in einem der beiden Durchschnittspuncte dieses Kreises und der Ebene abc statt haben; denn würde die Berührung in einem andern Puncte des Umfangs eintreten, also einseits der Ebene abc, so entspräche diesem Punct andererseits ein zweiter, in ganz denselben Abständen von den Kugelcentren; es erfolgte also die Berührung der dritten Kugel und der Ebene des Durchschnittskreises der beiden andern in zwei Puncten, was unmöglich.

Zu 2^b. Berühren sich die beiden Kreise, so hat diess in der Ebene der drei Kugelcentren statt. Denn erfolgte die Berührung ausserhalb dieser Ebene, z. B. zur einen Seite, so entspräche zur andern Seite diesem Punct ein zweiter Punct in ganz gleichen Abständen von den Kugelcentren und es hätten alsdann beide sich berührende Kreise zwei Puncte und somit sämmtliche Puncte mit einander gemein, d. h. sie fielen gänzlich zusammen; es läge daher auch das Centrum der dritten Kugel in der durch die Centren der beiden andern gehenden geraden Linie, was gegen die Voraussetzung.

Der Berührungspunct beider Kreise liegt daher in der

Digitized by Google

Ebene der drei Kugelcentren. Hieraus folgt auch, dass das Centrum des Kreises, den der Durchschnitt der Kugel *c* mit der Ebene des Kreises *a b* bildet, in der Ebene *a b c* liegt, indem dieses Centrum in der durch das Centrum des Kreises *a b* und den Berührungspunct beider Kreise sich erstreckenden, also in der Ebene *a b c* befindlichen geraden Linie liegt.

Im vorstehenden sind die Fälle bezeichnet, in denen drei Kugeln in der Ebene ihrer Centren einen Punct gemein haben. Dass drei Kugeln in der Ebene ihrer Centren nie mehr als einen Punct gemein haben können, erhellt aus folgenden Betrachtungen.

Sollen drei Kugeln, deren Centren in einem Kreis, zwei Puncte gemein haben, so müssen sich erstlich zwei derselben in einem Kreise, sodann die dritte Kugel die Ebene des letztern in einem zweiten Kreise, endlich beide Kreise sich wieder in zwei Puncten schneiden.

Nun schneiden sämmtliche aus dem Centrum *c* beschriebene Kugeln die Ebene des Kreises *a b* in concentrischen Kreisen, d. h. es haben alle diese Kreise ein und dasselbe Centrum. Dieses liegt aber nach dem obigen von einem dieser Kreise, mithin von allen in der Ebene *a b c*, mithin auch die Centrilinie beider Kreise.

Die Durchschnittspuncte jedes dieser Kreise mit der Ebene *a b c* gehören ferner dieser Centrilinie an, wogegen die Durchschnittspuncte beider Kreise ausserhalb der Centrilinie, mithin auch ausserhalb der Ebene *a b c* und zwar zu beiden Seiten derselben liegen. Es befinden sich daher in allen Fällen, in denen drei Kugeln nur zwei Puncte gemeinschaftlich haben, dieselben zu beiden Seiten der durch die drei Centren gelegten Ebene.

§. 109.

Drei Kugeln von gleichen Halbmessern können sich nur in einem oder zwei Puncten schneiden.

Die Durchschnittspuncte dreier Kugeln von gleichen Halbmessern sind von drei Puncten, den Kugelcentren gleich weit entfernt. Nun ist kein Punct von mehr als zwei Puncten

Digitized by Google

einer geraden gleich weit entfernt. Hieraus folgt, dass die Centren dreier sich schneidender Kugeln von gleichen Halbmessern nicht in gerader Linie liegen und somit auch der Durchschnitt dreier Kugeln von gleichen Halbmessern in nur einem oder zwei Puncten erfolgen kann.

§. 110.

Die gerade Linie ist Centrilinie eines Kreises, wenn zwei ihrer Puncte Centren desselben sind. Ist ein Punct aber Centrum eines Kreises, so ist er es auch in Bezug auf jede Ternion seiner Puncte. Da nun die Centrilinie zur nemlichen Seite der durch drei Puncte des zugehörigen Kreises gehenden Ebene in jedem den Halbmesser übersteigenden Abstand von diesen Puncten einen Punct enthält, in jedem solchen Abstand von den gegebenen Puncten zur nemlichen Seite der durch dieselben sich erstreckenden Ebene aber nur ein einziger Punct möglich ist, so folgt, dass jeder Punct der von drei Puncten eines Kreises gleich weit entfernt ist, seiner Centrilinie angehört, dass also die stetige Folge aller Puncte, deren jeder von einem unter drei gegebenen Puncten so weit entfernt ist, wie von jedem der beiden andern, eine gerade Linie bildet; daher diese unabhängig von der Ebene sich auch definiren lässt als Ort aller Puncte, deren jeder Punct von einem unter drei gegebenen Puncten so weit absteht wie von jedem der beiden andern.

Da endlich jeder Punct der geraden Linie in Bezug auf solche drei Puncte als gemeinschaftlicher Punct dreier Kugeln erscheint, deren Centren diese drei Puncte und deren Halbmesser dem Abstand des gegebenen Punctes von den Centren gleich ist, so ist die gerade Linie auch der Ort der Durchschnittspuncte stetig wachsender symmetrischer Kugelternionen von unveränderlichen Centren oder die stetige Folge dieser Durchschnittspuncte bildet die gerade Linie.

II. Rotation eines Systems um zwei Centren.

§. 111.

Liegen drei in krummer Ternion befindliche Puncte in einer gegebenen Ebene und rotirt der eine dieser Puncte um

Digitized by Google

die beiden andern als Centren, so verlässt derselbe diese Ebene mit Eintritt der Bewegung.

Die Rotation des Punctes geschieht in einem die Ebene in zwei Puncten durchdringenden Kreise. Diese Durchschnittspuncte folgen aber nicht stetig auf einander, da sie den Kreis in zwei Hälften trennen, und hieraus geht hervor, dass der Eintritt der rotirenden Bewegung jederzeit mit dem Austritt aus der Ebene verbunden ist.

§. 112.

Liegen drei in krummer Ternion befindliche Puncte in einer gegebenen Ebene und rotirt dieselbe mit einem dieser Puncte um die beiden andern als Centren, so rotiren alle übrigen mit den Centren nicht in gerader Linie befindlichen Puncte der Ebene; eine unmittelbare Folge der Einheit der durch eine solche Punctenternion gelegten Ebene.

§. 113.

Rotirt irgend ein Punct eines Systems um zwei andere Puncte desselben als Centren, so ist damit auch Rotation jedes andern, mit diesen in krummer Ternion befindlichen Punctes verbunden, sofern das System in den gegenseitigen Abstandsbeziehungen seiner Puncte unverändert bleiben soll. Es findet ferner beim Wiedereintritt eines rotirenden Punctes in seinen anfänglichen Ort gleichzeitig auch der Wiedereintritt aller rotirenden Puncte in ihre ursprünglichen Orte statt.

Es sey (Fig. 36) m der um a und b rotirende Punct, mpn der von ihm zu beschreibende Kreis, ferner r irgend ein anderer mit a und b in krummer Ternion befindlicher Punct des Systems und y die durch a, b und r gelegte Ebene, so schneidet diese die Kreisebene, mit der sie das Centrum c gemein hat, in einer durch dieses und den Kreisumfang gehenden geraden Linie cp.

Beschreibt nun m in seinem Kreis das Bogenstück mz, so beschreibt auch der zum Durchschnitt beider Ebenen gehörige Kreispunct p ein gleich grosses Bogenstück pq, indem die Puncte m und p bei der Rotation ihren Abstand beibehalten.

Digitized by Google

Rotirt aber p, so rotirt nach dem vorigen Paragraphen auch der mit p in derselben Ebene liegende Punct r. Die Rotation eines Punctes m um a und b hat daher Rotation jedes andern Punctes r zur Folge, der nicht in der durch a und b sich erstreckenden geraden Linie liegt. — Jedem bestimmten Ort des Punctes m entspricht ein bestimmter Ort der Puncte p und r und hieraus geht hervor, dass mit Eintritt eines rotirenden Punctes in seinen anfänglichen Ort zugleich der Wiedereintritt aller rotirenden Puncte in ihre ursprüngliche Lage erfolgt.

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.

Berührung und Krümmung der Linien.

I. Berührung.

§. 114.

Eine Linie, welche mit einer andern so viele stetig auf einander folgende Puncte gemein hat, als zu ihrer Ortsbestimmung erfordert werden, heisst Berührungslinie der andern in den gegebenen Puncten und zwar Berührungslinie im engern Sinn.

Insbesondere heisst die gerade Linie, welche mit einer Curve zwei stetig folgende Puncte gemein hat, Tangente derselben, und der Kreis, welcher mit einer andern Curve drei stetig auf einander folgende Puncte gemeinschaftlich besitzt, Berührungskreis und aus weiter unten zu ersehendem Grunde, auch Krümmungskreis in den gemeinschaftlichen Puncten.

Berührungslinie im weitern Sinne ist eine Linie, sobald sie mit einer andern mindestens zwei, jedoch eine geringere als die zu ihrer Bestimmung erforderliche Anzahl stetig folgender Puncte gemein hat. Der Kreis also, der mit einem andern Kreis oder irgend einer andern Curve zwei stetig folgende Puncte gemein hat, berührt letztere im weitern Sinne. Man theilt daher die Berührungen nach der Zahl der Berührungspuncte in Ordnungen und unterscheidet Berührung der ersten, zweiten Ordnung etc.

Die gerade Linie kann mit einer Curve, dem Begriff der letztern zufolge, in der Regel nur eine Berührung der ersten Ordnung eingehen, da in der Regel keine drei stetig folgende Puncte einer Curve in gerader Linie liegen. Dagegen kann

Digitized by Google

der Kreis andere Curven in erster und zweiter Ordnung berühren.

Da die gerade Linie die einzige, die durch zwei Puncte bestimmt ist, alle andern Linien aber zu ihrer Bestimmung mindestens drei Puncte erfordern, so findet zwischen Curven irgend welcher Art, sobald sie nur zwei stetig folgende Puncte gemein haben, nur Berührung im weitern Sinne statt. Solche Curven haben in den gegebenen Punctenpaaren eine gemeinschaftliche berührende Gerade oder Tangente.

Ist x (Fig. 37) ein Kreis, und ab eine Gerade, die mit demselben einen Punct a gemein hat und verlängert ihn in einem zweiten Puncte n durchdringt, ist ferner ah im Ort a eine Tangente, so lassen sich aus a unzählige andere Geraden ad, ag ziehen, welche zwischen ab und dem Bogen ax hindurchgehen, dagegen ist zwischen der Tangente und dem Bogen keine andere Gerade mehr aus a möglich, es wird vielmehr jede durch a und einen im Raum hax befindlichen Punct r sich erstreckende Gerade ar den Bogen ax irgendwo durchdringen.

Ist ferner $abcdg$ (Fig. 38) eine Curve und abz ein Kreis, der mit ihr zwei stetig folgende Puncte a und b gemein hat, so sind unzählige andere Kreise durch dieselben beiden Puncte zur nemlichen Seite der Curve möglich. Unter allen denkbaren Kreisen dieser Art ist einer, der auch noch den dritten stetig folgenden Punct c mit der Curve gemein hat, zwischen welchem und der Curve durch die gegebenen drei Puncte kein anderer Kreis mehr construirt werden kann, und der als der letzte aller Kreise erscheint, die die Curve in dem gegebenen Ort umschliessen und der den Uebergang bildet zu den Kreisen, welche von der Curve in dem gegebenen Ort umschlossen werden.

Will man daher die Einführung stetig folgender Puncte, die was Abstand anbelangt, nur als einziger Punct erscheinen, bei der Begriffsbestimmung der Berührung umgehen, so lassen sich nach den angeführten Erscheinungen die Tangente und der Berührungskreis definiren, wie folgt:

Digitized by Google

1. Eine gerade Linie, welche mit einer Curve einen Punct gemein hat, ist Tangente an diesen Punct, wenn aus demselben keine andere Gerade mehr gezogen werden kann, deren Anfangsstück zwischen der gegebenen geraden und der Curve hindurchzieht.

2. Ein Kreis, der mit einer Curve einen Punct gemein hat, ist Berührungskreis an diesen Punct, wenn aus demselben kein anderer Kreisbogen mehr gezogen werden kann, dessen Anfangsstück zwischen dem gegebenen Kreis und der Curve hindurchgeht.

Aus dieser Begriffsbestimmung lässt sich zugleich ein Verfahren zur Construction der Tangenten an einen bestimmten Kreispunct herleiten. Zieht man nemlich aus dem Centrum an den gegebenen Punct des Umfangs einen Halbmesser, errichtet auf denselben in der Ebene des Kreises in jenem Punct ein Senkel, so ist dieses eine Tangente.

Denn ist ah (Fig. 37) das Senkel auf den Halbmesser ac, so wird jede durch a und einen zwischen dem Bogen ax und dem Senkel ah befindlichen Punct r sich erstreckende Gerade ar mit ihrem Anfang in dem Innern des Kreises liegen, weil der Winkel $car < 90°$, daher der dem Punct a zunächst folgende Punct der Geraden ax von c einen geringern Abstand als der Punct a haben muss.

Zugleich folgt, dass die früher gegebene Begriffsbestimmung der Berührung zweier Kreise der hier gegebenen allgemeinen nicht widerstreitet, da, wenn zwei in derselben Ebene liegende Kreise nur einen gemeinschaftlichen Punct besitzen, dieser nach dem früher erwiesenen der durch beide Centren ziehenden geraden Linie angehört, oder mit andern Worten die aus den Centren nach dem gemeinschaftlichen Punct gezogenen Radien in einer und derselben geraden Linie liegen, daher das in dem gemeinschaftlichen Punct auf den einen Halbmesser errichtete Senkel zugleich auch Senkel auf den andern, dieses mithin gemeinschaftliche Tangente beider Kreise in dem gemeinschaftlichen Puncte ist.

Berührung bildet übrigens keinen Gegensatz von Schneiden,

Digitized by Google

da beides vereinigt und eine Tangente unter Umständen zugleich Durchschnittslinie seyn kann, was überall dort der Fall, wo die Curve, wie (Fig. 39), aus der Convexität zur Concavität übergeht, oder wo der Durchschnitt der auf einander folgenden Normalen von einer Seite der Curve zur andern überspringt.

II. Krümmung.

§. 115.

Construirt man in einen Kreis ein reguläres Vieleck, und errichtet auf jede Seite in einem Endpunct ein Senkel, so schneiden sich, wie leicht zu beweisen, je zwei und zwei dieser Senkel oder Normalen und es entsteht im Innern des Vielecks ein aus den von je zwei Durchschnittspuncten begrenzten Senkelstücken bestehendes, dem gegebenen an Seitenzahl gleiches reguläres Vieleck des nemlichen Centrums, dessen Scheitelpuncte dem Centrum näher liegen als diejenigen des gegebenen Vielecks.

Je grösser die Seitenzahl des in den Kreis eingeschriebenen Vielecks, um so näher rücken die Scheitelpuncte des secundären Vielecks, wie wir das durch jene Senkelstücke erzeugte heissen wollen, dem Kreiscentrum.

Denken wir uns durch jedes Paar stetig folgende Puncte des Kreises Tangenten gezogen und auf diese in gleicher Weise in dem einen Punct die Normalen errichtet, so bilden die auf einander folgenden Durchschnittspuncte der letztern gleichfalls einen secundären Kreis, der mit dem gegebenen Kreis ein gemeinschaftliches Centrum besitzt und dessen Puncte von diesem Centrum keinen Abstand mehr haben, zwischen welchen und dem Centrum nur noch eine stetige Ortsverschiedenheit besteht, ein Kreis also, der, was Ausdehnung betrifft, als einziger mit dem Centrum zusammenfallender Punct betrachtet werden kann.

Die auf die Kreistangenten im Berührungsort errichteten Normalen schneiden sich also sämmtlich in ein und demselben Punct, dem Centrum, und sind daher alle einander gleich und mit dem Halbmesser congruent.

Digitized by Google

Der Winkel, den zwei nächstfolgende Seiten eines Polygons bilden, beträgt mit dem Winkel zweier nächstfolgenden correspondirenden Normalen 180°; auch ist der Winkel, den die Verlängerung einer Seite mit der folgenden bildet, der Nebenwinkel des Polygonwinkels gleich dem Winkel zweier nächstfolgenden Normalen.

Aus gleichem Grunde ist auch dieser Nebenwinkel zweier unmittelbar auf einander folgenden Tangenten des Kreises dem Winkel zweier unmittelbar auf einander folgenden Normalen oder Halbmesser gleich.

Bei dem Polygon (Fig. 40) kommt dieser Nebenwinkel überein mit dem Winkel, welchen zwei mit den Normalen parallel gezogene, durch die Mitte der Seiten gelegte und im Centrum des umschriebenen Kreises sich schneidende Linien bilden, und dieser hat zum Maas das zwischen seinen Schenkeln liegende endliche Stück Bogen des umschriebenen Kreises, einen Bogen also, der den durch die Seitenzahl des Polygons angezeigten aliquoten Theil des Kreisumfangs bildet.

Der von zwei unmittelbar auf einander folgenden Normalen eines Kreises gebildete Winkel hat in gleicher Art den von zwei unmittelbar auf einander folgenden Puncten des Kreises begrenzten Bogen zum Maas; ein Bogenstück, dem alle Ausdehnung oder Länge abgeht, da zwei stetig folgende Puncte einer Linie nichts Ausgedehntes begrenzen.

Während also der Winkel des Polygons durch einen endlichen Kreisbogen gemessen wird, ist der Bogen, der als Maas des von zwei nächst folgenden Tangenten eines Kreises gebildeten Nebenwinkels erscheint, ohne alle Grösse, es ist also der Nebenwinkel zweier unmittelbar folgenden Tangenten eine durch keine Bogenlänge zu messende Grösse, er ist, was Grösse anbelangt, vollkommen Null. Gleichwohl bilden zwei unmittelbar auf einander folgende Tangenten des Kreises keine einzige gerade Linie, da die in zwei stetig folgenden Puncten auf beide errichteten Senkel sich im Centrum begegnen. Sie bilden also Winkel, der nur durch

Digitized by Google

Bogen nicht gemessen werden kann, zu dessen Messung daher ein anderes Maas erforderlich ist.

Diese durch das gewöhnliche Maas nicht messbaren Winkel, die Winkel der Tangenten mit den Verlängerungen der unmittelbar folgenden Tangenten heissen Krümmungen.

Kehren wir zu unserm Polygon zurück, so schneiden sich zwei nächstfolgende Normalen in um so grösserer Entfernung von den Scheiteln, je grösser bei constanter Seitenlänge der Polygonwinkel, oder je kleiner der Polygonnebenwinkel, der bei Curven als der eigentliche Krümmungswinkel behandelt wird. Es wurde schon erwähnt, dass als Winkelmaas jede mit dem Winkel variirende Grösse angewendet werden kann, und je nach der Wahl der Maase auch dasselbe Winkelpaar bald dieses, bald jenes Verhältniss zu einander hat. Man sieht hier, dass mit der Zunahme der Polygonwinkel oder Abnahme der Polygonnebenwinkel die Länge der Normalen wächst, und man könnte daher auch zweien Polygonwinkeln, die Seiten überall von gleicher Länge vorausgesetzt, das gerade, und zweien Polygonnebenwinkeln das umgekehrte Verhältniss der zugehörigen Normalen zuschreiben. So wie nun verschiedenen Senkellängen verschiedene Polygonnebenwinkel entsprechen, so ist aus der Verschiedenheit der Kreishalbmesser auch auf eine Verschiedenheit der Kreiskrümmungen oder, was dasselbe ist, auf eine Verschiedenheit der Nebenwinkel, welche die Kreiselemente mit den Verlängerungen der unmittelbar folgenden Elemente bilden, zu schliessen und es ist zulässig und üblich, diesen Nebenwinkeln oder Krümmungen, wie diess bei den Polygonnebenwinkeln geschehen könnte, das umgekehrte Verhältniss der entsprechenden Halbmesser beizulegen. Man hat daher, wenn k und K die Krümmungen und r und R die zugehörigen Halbmesser bezeichnen, die Proportion:

$$k : K = \frac{1}{r} : \frac{1}{R} = R : r,$$

d. h. es verhalten sich die Krümmungen verschiedener Kreise wie umgekehrt ihre Halbmesser; wogegen bei demselben

Digitized by Google

Kreis in allen Puncten die Krümmung, wie bei dem regulären Polygon in allen Scheiteln der Winkel dieselbe Grösse hat.

Da durch jede drei Puncte in krummer Ternion, also auch durch jede Ternion stetig folgender Puncte der Art sich ein Kreis legen lässt, so kann man auch jede Ternion stetig folgender Puncte jeder andern Curve als Puncte eines Kreises betrachten, und es ist hiernach die Krümmung der Curve in jeder Ternion der Krümmung des durch dieselbe gehenden Kreises gleich.

Der Halbmesser dieses Kreises ist sofort der Krümmungsmesser der Curve in der gegebenen Ternion oder dem gegebenen Punct, (da jede noch so grosse Menge stetig folgender Puncte in Ansehung des Abstands nur als einziger Punct erscheint) und heisst deshalb auch Krümmungshalbmesser, so wie der zugehörige Kreis Krümmungskreis genannt wird.

Die Mehrzahl aller Linien bildet die Klasse der doppelt gekrümmten Linien, nemlich derjenigen, deren keine vier stetig auf einander folgenden Puncte in einer und derselben Ebene liegen.

Diese Linien besitzen neben der hier betrachteten Krümmung noch eine zweite mit der Flächenkrümmung zusammenhängende, deren Auseinandersetzung aber hier unterbleiben muss, da die Abhandlung der Flächenkrümmung nicht in unserm Plane liegt.

Digitized by Google

Schluss.

Schliesslich wollen wir die zwischen der geraden Linie und andern Raumgrössen bestehende Analogie nachweisen und über die Hauptergebnisse dieser Untersuchungen sowie die dabei aufgestellten und abgeleiteten Begriffe räumlicher Grössen einen Ueberblick geben.

Sind a, b, c und d in der angeführten Ordnung auf einander folgende Puncte einer geraden Linie, sind ferner die Abstände ab und cd einander gleich und denkt man sich zuerst die mittlern Puncte b und c als Centren veränderlicher Kugeln mit der Bedingung, dass die Summe ihrer Halbmesser r und ϱ beständig dem Abstand der äussern Puncte a und d gleich bleibt, so findet

für $r > ba$ aber $< bd$ Durchschnitt der Kugeln,
für $r = ba$ Berührung derselben im Punct a,
für $r = bd$ " " " " d,
für $r < ba$ und $r > bd$ } endlich weder Durchschnitt noch Berührung statt.

Lässt man daher den Halbmesser r von ba bis bd stetig wachsen, also ϱ von bd bis ba stetig um gleich viel abnehmen, so erhält man eine stetige Folge mit dem Punct anfangender und mit ihm endigender Kreise, eine völlig einschliessende zur Klasse der Ellipsoide gehörige Fläche, ein elliptisches Conoid, eine Fläche, deren jeden Punctes Abstandssumme von den beiden mittlern Puncten der Construction zufolge dem Abstand der äussern Puncte gleich kommt.

Betrachtet man dagegen die äussern Puncte a und d als Centren veränderlicher Kugeln mit der Bedingung, dass der

Digitized by Google

Unterschied ihrer Halbmesser beständig dem Abstand der mittlern Puncte b und c gleich bleibt, so findet

für $r > ab$ aber $< \varrho$ } Durchschnitt der Kugeln,
und für $\varrho > ab$ aber $< r$ }
für $r = ab$ Berührung derselben im Punct b,
für $r = ac$ „ „ „ „ c,
für r und $\varrho < ab$ oder cd endlich weder Durchschnitt noch Berührung statt.

Lässt man daher unter der Voraussetzung $r < \varrho$ den Halbmesser r, daher auch jenen ϱ von ab beziehungsweise bd anfangend ohne Ende gleichmässig und stetig wachsen, so bildet die Folge aller mit dem Punct b beginnenden Durchschnitte oder Kreise eine unbegrenzte Fläche. Ebenso entsteht, wenn das Wachsen der Halbmesser mit der Combination $r = ac$ und $\varrho = cd$ beginnt, vom Punct c ausgehend eine zweite, von der ersten völlig getrennte, aber mit derselben congruente, unbegrenzte Fläche. Das System beider gehört zur Klasse der Hyperboloide und heisst hyperbolisches Conoid.

Es ist dieses Flächensystem der Construction zufolge ein solches, dessen jeden Punctes Abstandsunterschied von den gegebenen äussern Puncten dem Abstand der mittlern gleich kommt.

Diess vorausgeschickt geben wir folgenden Ueberblick:

1. Der Ort aller von einem gegebenen Punct gleich entfernten Puncte ist eine einschliessende Fläche und heisst Kugel.

2. Der Ort aller von jedem unter zwei gegebenen Puncten gleich entfernten Puncte ist eine einschliessende Linie und heisst Kreis.

3. Der Ort aller Puncte, deren jeder von einem unter zwei gegebenen Puncten so entfernt ist, wie vom andern, ist eine nirgends begrenzte Fläche und heisst Ebene.

4. Der Ort aller Puncte, deren jeder von einem unter drei gegebenen Puncten so entfernt ist wie von jedem der beiden andern, ist ein beiderseits unbegrenzter linearischer

Digitized by Google

Raum, ein Längenminimum zwischen jedem Paar seiner Puncte und heisst gerade Linie.

5. Eine ebene Linie, deren jeder Punct von einem unter zwei gegebenen, mit ihr in derselben Ebene befindlichen Puncten so entfernt ist wie vom andern, ist eine gerade Linie.

6. Die Folge der Durchschnittspuncte in derselben Ebene liegender, stetig wachsender symmetrischer Kreisbinionen von unveränderlichen Centren bildet eine gerade Linie.

7. Der Kreis erscheint als Durchschnitt einer einzelnen Kugelbinion;

die Ebene als Ort der Durchschnitte stetig wachsender symmetrischer Kugelbinionen und

die gerade Linie als Ort der Durchschnittspuncte stetig wachsender symmetrischer Kugelternionen von unveränderlichen Centren.

8. Der Ort aller Puncte, deren Abstandssummen von zwei gegebenen Puncten einander gleich und grösser als der Abstand dieser Puncte, ist eine völlig einschliessende Fläche und heisst elliptisches Conoid.

9. Der Ort aller Puncte, deren Abstandsunterschiede von zwei gegebenen Puncten einander gleich und kleiner als der Abstand dieser Puncte, ist ein System von zwei völlig getrennten unbegrenzten Flächen und heisst hyperbolisches Conoid.

10. Der Ort aller Puncte, deren Abstandssummen von zwei gegebenen Puncten dem Abstand dieser Puncte selbst gleich, ist die von denselben begrenzte gerade Linie.

11. Der Ort aller Puncte, deren Abstandsunterschiede von zwei gegebenen Puncten dem Abstand dieser Puncte selbst gleich, besteht in den unendlichen Verlängerungen der von denselben begrenzten geraden Linie.

Die gerade Linie vereinigt mithin die dem elliptischen Conoid eigenthümliche Beständigkeit der Abstandssummen und die dem hyperbolischen Conoid eigenthümliche Beständigkeit der Abstandsunterschiede seiner Puncte von gegebenen zwei Puncten in sich.

Digitized by Google

Während aus den gangbaren Erklärungen der geraden Linie und der ebenen Fläche nicht ein einziger Satz der Elementargeometrie gefolgert werden kann und alle ihre Lehren seither

1. auf die unerwiesene Einheit der zwischen zwei Puncten gezogenen kleinsten oder geraden Linie,
2. auf die unerwiesene Existenz von Flächen, durch deren jedes Punctenpaar sich eine mit allen Puncten in die Fläche fallende gerade Linie legen lässt,
3. auf einen unerwiesenen Satz über Winkelsumme und Unterschied, endlich
4. auf das Beweis erfordernde elfte Euklidische Axiom oder statt dessen einen andern unerwiesenen Satz

als letzten Grund basirt worden sind, finden diese Sätze sich hier mit sämmtlichen oben aufgezählten, aber nirgends gebräuchlichen Begriffen der geraden Linie und der ebenen Fläche in logischer Verkettung mit dem einfachsten aller nur denkbaren Begriffe räumlicher Grössen, dem der Elementargeometrie entlehnten Begriff der Kugel dargestellt.

Während der unübertrefflichen Einfachheit des sinnlichen Eindrucks wegen die gerade Linie und die ebene Fläche als unauflösbar, logisch unerklärbar betrachtet zu werden pflegen, finden beide ihren Ursprung in der Kugel, ihre Erklärung durch die Kugel.

Die Kugel erscheint mithin als Grundpfeiler des geometrischen Lehrgebäudes, der Kugelbegriff als Urquell der geometrischen Lehren.

Digitized by Google

Berichtigungen.

1. An die Stelle der ersten drei Zeilen des §. 46 ist zu setzen: „Die Ebene hat in jedem Punct eine Richtlinie.“
2. In den §§. 50 und 52 sind in sich zurückkehrende kugelische Linien zu verstehen, ebenso in §. 53, in dessen letzter Zeile überdies anstatt Linie „kugelische Linie“ zu lesen ist.
3. Seite 58, Zeile 17 ist die über den Fusspunct des Senkels sich erstreckende Verlängerung und Zeile 18 der Abstand vom Fusspunct zu verstehen.
4. In §. 104, Zeile 3 ist anstatt „Vierecks“ zu lesen „ebenen Vierecks.“

Digitized by Google